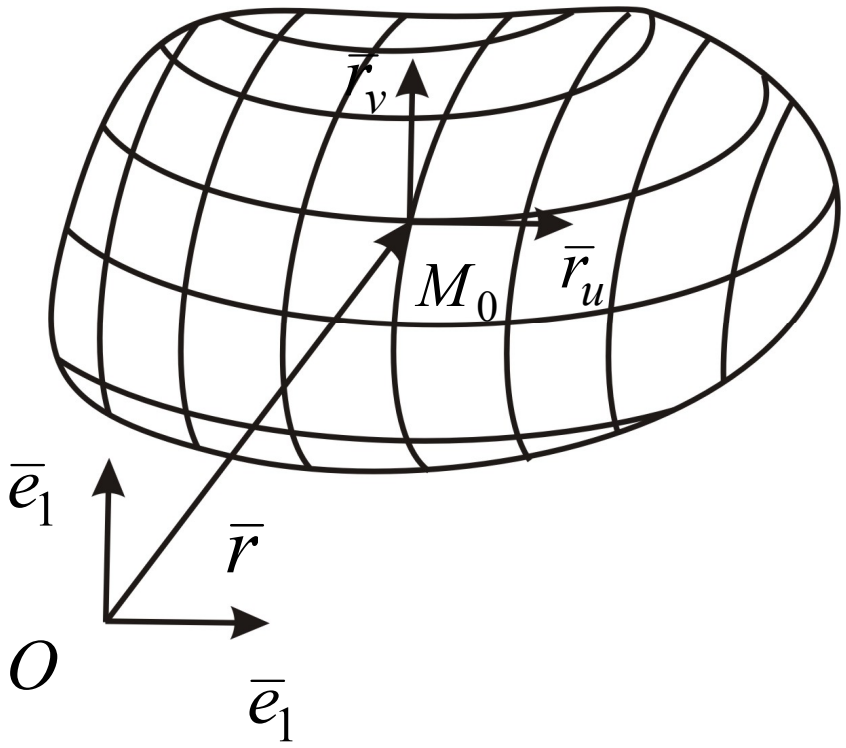
**Лиман Ф.М.**

# ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО ТА ТЕНЗОРНОГО АНАЛІЗУ



**Міністерство освіти і науки України**
**Сумський державний педагогічний університет**
**ім. А.С. Макаренка**

**Лиман Ф.М.**

# ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО ТА ТЕНЗОРНОГО АНАЛІЗУ

*Навчальний посібник*
*для студентів фізико-математичних*
*факультетів*

**Суми**
**СумДПУ імені А.С. Макаренка**
**2005**

УДК 512.972
ББК 22.151.5
Л58

Друкується згідно з рішенням вченої ради
Сумського державного педагогічного університету
імені А.С. Макаренка

**Рецензенти:**

доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова **Працьовитий М.В.**;

кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри математичного аналізу і методів оптимізації Сумського державного університету **Ячменьов В.О.**

**Лиман Ф.М.**

Л58 Основи векторного та тензорного аналізу: Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів. – Суми: СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2005. – 84 с.

ISBN 966-698-031-2

Посібник складено у відповідності до програми з курсу „Основи векторного та тензорного аналізу” для фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Теоретичний матеріал ілюструється прикладами. Після кожного розділу пропонуються задачі для практичних занять і самостійного розв’язання.

Посібник рекомендується для студентів та викладачів фізико-математичних факультетів університетів. Його можуть використовувати для самоосвіти всі, кого цікавить векторний і тензорний аналіз.

ISBN 966-698-031-2 УДК 512.972
ББК 22.151.5

© Лиман Ф.М., 2005
© СумДПУ, 2005

# ЗМІСТ

Вступ.....5
§1. Основні факти лінійної та векторної алгебри.....6
1.1. Скаляри і вектори. Дії над векторами.....6
1.2. Скалярний, векторний і мішаний добутки векторів.....8
Задачі.....12
§2. Перехід від одного ортонормованого базису простору до іншого. Основна задача тензорного числення.....14
Задачі.....18
§3. Скалярні функції векторних аргументів. Полілінійні форми.....18
3.1. Лінійні форми.....19
3.2. Білінійні форми.....20
3.3. Полілінійні форми.....22
Задачі.....24
§4. Поняття тензора та його валентності.....25
Задачі.....28
§5. Алгебраїчні операції над тензорами.....29
Задачі.....32
§6. Симетричні та кососиметричні тензори.....33
Задачі.....35
§7. Тензорні поля та їх диференціювання.....36
§8. Криволінійні ортогональні координати.....40
8.1. Криволінійні координати на площині.....40
8.2. Криволінійні координати в просторі.....44
Задачі.....50
§9. Скалярні поля. Градієнт скалярного поля. Похідна по напрямку.51
9.1. Поверхні рівня.....51
9.2. Градієнт скалярного поля.....52
9.3. Похідна по напрямку.....55
Задачі.....58
§10. Векторні поля та їх диференціальні характеристики.....59
10.1. Векторні лінії.....59
10.2. Дивергенція векторного поля.....61
10.3. Ротор векторного поля.....64
10.4. Оператор набла. Диференціальні операції другого порядку.....66
Задачі.....69
§11. Інтегральні теореми векторного аналізу.....70
11.1. Потік векторного поля.....71
11.2. Теорема Остроградського.....75

11.3. Лінійні інтеграли та циркуляція векторного поля.....76
11.4. Теорема Стокса.....79
Задачі.....81
Список рекомендованої та використаної літератури.....83

# ВСТУП

Значна частина математики та її застосувань пов’язана з поняттям функції. У більшості випадків це дійсні функції дійсних аргументів, дійсні або комплексні функції комплексних аргументів. Проте в прикладних аспектах математики, що активно використовуються в фізиці, хімії, механіці та в ряді чисто інженерних дисциплін, використовуються скалярні та векторні функції векторних аргументів.

З часів Р. Декарта (1596–1650) за допомогою чисел і функцій вивчають геометрію. Ідея „алгебраїзації” геометрії і побудова аналітичної геометрії виявилась досить плідною. З XVII століття математика, а разом з нею і інші науки, постійно використовує переваги методів аналітичної геометрії. За час свого існування основні ідеї аналітичної геометрії розширювались і поглиблювались за рахунок прогресу в розвитку інших математичних дисциплін.

Першим значним внеском в аналітичну геометрію було систематичне використання методів диференціального та інтегрального числення. Другим (за часом) було використання в аналітичній геометрії методів лінійної алгебри і теорії груп. Цей етап розвитку геометрії виявився революційним не тільки в математиці, а і в інших фундаментальних науках, і був завершений на початку XX століття. Важливими об’єктами досліджень цього періоду є полінійні форми і полінійні відображення, які з часом стали основою для формування поняття тензора і тензорного числення.

Курс „Основи векторного та тензорного аналізу” передбачає вивчення основних понять векторного і тензорного аналізу в тісному взаємозв’язку з курсом лінійної алгебри і різних фізичних теорій. Для простоти і наочності виклад матеріалу у посібнику проведено для тривимірного простору. Всі введені поняття і результати щодо зв’язків між ними та їх властивостей ілюструються прикладами з математики, механіки та фізики.

# §1. Основні факти лінійної та векторної алгебри

**1.1. Скаляри і вектори. Дії над векторами.** Величина, яка характеризується одним числом, називається *скалярною величиною* або *скаляром*. Прикладами скалярних величин є довжина, площа, об'єм, густина, маса, робота сили, температура. Порівнювати можна лише однойменні скаляри, які вважаються рівними лише тоді, коли вони мають однакову розмірність і їх числові значення рівні.

Величини, що характеризуються числовим значенням і напрямком у просторі, називають *векторними* або *векторами.* До таких величин належать паралельний перенос, швидкість, прискорення матеріальної точки, сила, момент сили, напруга електричного поля, поляризація тощо. Таким чином під вектором розумітимемо направлений відрізок. Векторну величину зображуємо вектором, напрям якого збігається з напрямом розглядуваної величини, а довжина при фіксованому масштабі характеризує її числове значення (довжину вектора).

В курсі лінійної алгебри і аналітичної геометрії розглядались такі дії над векторами та їх властивості: додавання і віднімання векторів, множення вектора на дійсне число, скалярний і векторний добутки двох векторів, мішаний добуток трьох векторів. При цьому активно використовувалось поняття рівності векторів: два вектори рівні, якщо вони мають однакову довжину і однакові напрямки.

**Зауваження.** В прикладних задачах, власне кажучи, розрізняють *вільні*, *ковзні* та *зв'язані вектори.*

Вільні вектори – це вектори у наведеному вище тлумаченні. Їх можна переносити паралельно і початок вектора вибрати в будь-якій точці простору. У просторі такий вектор однозначно характеризується своїми проекціями на вісі координат або своїми координатами: $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Прикладом вільного вектора є швидкість поступального руху тіла.

Ковзні вектори – це вектори, які можна переносити лише по прямій, яка визначає напрям вектора. Ковзний вектор потребує для свого визначення 5 чисел: наприклад, його можна визначити трьома проекціями на вісі координат і двома координатами точки перетину напрямної прямої з однією з координатних площин. Прикладом ковзного вектора є вектор сили, прикладеної до твердого тіла.

Зв'язний вектор відноситься до певної точки простору. Для його визначення треба 6 чисел, наприклад, координати початку і кінця

вектора. Прикладами таких векторів є вектори швидкості і прискорення точки твердого тіла при його довільному русі.

Вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ називаються *лінійно залежними*, якщо існують числа $c_1, c_2, ..., c_n$, серед яких хоча б одне відмінне від нуля і має місце рівність

$$c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + ... + c_n\bar{a}_n = \bar{0}. \qquad (1)$$

Якщо рівність (1) виконується лише за умови $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$, то вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ називаються *лінійно незалежними*.

Два лінійно залежних вектори називаються *колінеарними*. При цьому вони паралельні між собою.

Три лінійно залежних вектори називаються *компланарними*. Компланарні вектори лежать в одній площині.

Будь-які три некомпланарні вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ простору утворюють базис простору. Через них можна однозначно виразити у вигляді лінійної комбінації будь-який вектор $\bar{x}$:

$$\bar{x} = c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + c_3\bar{a}_3. \qquad (2)$$

При розв'язуванні конкретних задач у просторі вибирають в багатьох випадках три взаємно перпендикулярні вектори $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ одиничної довжини (орти). Вони і породжують відповідну декартову прямокутну систему координат, яку називають *ортонормованою системою координат*. Для зручності записів перейдемо до наступних позначень: $\bar{i} = \bar{e}_1$, $\bar{j} = \bar{e}_2$, $\bar{k} = \bar{e}_3$. Тоді $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 = \sum_{k=1}^{3} x_k\bar{e}_k$.

Цей запис спрощують далі, відкидаючи знак суми, тобто пишуть

$$\bar{x} = x_k\bar{e}_k, \qquad (3)$$

вважаючи при цьому, що по індексу $k$ відбувається підсумовування від 1 до 3 (в загальному випадку від 1 до $n$). Це правило називається *„домовленістю про підсумовування" А. Ейнштейна* (1879–1955). Індекс $k$ називається *індексом підсумовування*. Його можна замінити будь-якою іншою буквою, наприклад $t$. Отже,

$$x_k\bar{e}_k = x_t\bar{e}_t.$$

Числа $x_k$ ($k$ = 1, 2, 3) називаються *координатами вектора* $\bar{x}$ *в базисі* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Нагадуємо наступні властивості координат векторів:

1) якщо два вектори рівні, то рівні їх відповідні координати в заданому базисі і навпаки;

2) при додаванні векторів відповідні координати векторів додаються;

3) при множенні вектора на число кожна його координата перемножується на це число.

Наприклад, якщо $\bar{a}$ = (1, –1, 3), $\bar{b}$ = (0, 4, 2), то $\bar{a} \neq \bar{b}$, $\bar{a} + \bar{b} = (1, 3, 5)$, $5\bar{a} = (5, -5, 15)$.

## 1.2. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів

**1.2.1.** Розглянемо, як запишеться в наших позначеннях скалярний добуток двох векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$. За означенням

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}| \cdot |\bar{y}| \cdot \cos\varphi, \qquad (4)$$

де $|\bar{x}|$, $|\bar{y}|$ – довжини векторів, а $\varphi$ – кут між ними.

Як відомо, скалярний добуток векторів має такі властивості:

1) $\bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x}$;

2) $(c\bar{x})\bar{y} = c(\bar{x}\bar{y})$;

3) $(\bar{x} + \bar{y})\bar{z} = \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z}$;

4) $\bar{x}\bar{x} > 0$ при $x \neq 0$.

Введемо позначення

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ коли } i = j, \\ 0, \text{ коли } i \neq j. \end{cases}$$

Числа $\delta_{ij}$ називаються *симетричними символами Кронекера* ((1823–1891) – німецький математик). Тоді скалярні добутки базисних взаємно ортогональних векторів у загальному випадку запишуться так:

$$\bar{e}_i \bar{e}_j = \delta_{ij}. \qquad (5)$$

Якщо $\bar{x} = x_i \bar{e}_i$, $\bar{y} = y_j \bar{e}_j$, то

$$\bar{x}\bar{y} = (x_i \bar{e}_i)(y_j \bar{e}_j) = x_i y_j (\bar{e}_i \bar{e}_j) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = x_k y_k. \qquad (6)$$

Довжина вектора $\bar{x}$ обчислюється за формулою

$$|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{x_i x_i} = \sqrt{x_i^2}. \qquad (7)$$

Кут $\varphi$ між векторами $\bar{x} = x_i \bar{e}_i$ та $\bar{y} = y_i \bar{e}_i$ обчислюється за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\bar{x}\bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|} = \frac{x_i y_i}{\sqrt{x_i x_i} \cdot \sqrt{y_i y_i}}. \qquad (8)$$

Тому умова ортогональності векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ (позначатимемо $\bar{x} \perp \bar{y}$) має вигляд:

$$x_i y_i = 0. \qquad (9)$$

**1.2.2.** *Векторним добутком* векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ називається третій вектор $\bar{z}$, який задовольняє наступні умови:

1) $\bar{z} = |\bar{x}||\bar{y}| \cdot \sin\varphi$, де $\varphi$ – кут між векторами $\bar{x}$ та $\bar{y}$;

2) $\bar{z} \perp \bar{x}$ і $\bar{z} \perp \bar{y}$;

3) якщо вектор $\bar{z} \neq 0$, то вектори $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ утворюють праву трійку векторів.

Векторний добуток векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ позначатимемо $\bar{x} \times \bar{y}$.

Векторний добуток має такі властивості:

1) $\bar{x} \times \bar{y} = -(\bar{y} \times \bar{x})$;

2) $(c\bar{x}) \times \bar{y} = c(\bar{x} \times \bar{y})$;

3) $(\bar{x} + \bar{y}) \times \bar{z} = (\bar{x} \times \bar{z}) + (\bar{y} \times \bar{z})$;

4) векторний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори колінеарні;

5) довжина векторного добутку $|\bar{x} \times \bar{y}|$ не колінеарних векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ дорівнює площі $S$ паралелограма, побудованого на векторах $\bar{x}$ і $\bar{y}$, віднесених до спільного початку, тобто $S = |\bar{x} \times \bar{y}|$;

6) векторні добутки ортів $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ для правого базису мають такі властивості:

$$\bar{e}_1 \times \bar{e}_1 = \bar{e}_2 \times \bar{e}_2 = \bar{e}_3 \times \bar{e}_3 = \bar{0};\ \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \bar{e}_3;\ \bar{e}_2 \times \bar{e}_3 = \bar{e}_1;\ \bar{e}_3 \times \bar{e}_1 = \bar{e}_2;$$
$$\bar{e}_2 \times \bar{e}_1 = -\bar{e}_3;\ \bar{e}_3 \times \bar{e}_2 = -\bar{e}_1;\ \bar{e}_1 \times \bar{e}_3 = -\bar{e}_2;$$

7) векторні добутки ортів $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ для лівого базису мають такі властивості:

$$\bar{e}_1 \times \bar{e}_1 = \bar{e}_2 \times \bar{e}_2 = \bar{e}_3 \times \bar{e}_3 = \bar{0};\ \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = -\bar{e}_3;\ \bar{e}_1 \times \bar{e}_3 = \bar{e}_2;\ \bar{e}_2 \times \bar{e}_1 = \bar{e}_3;$$
$$\bar{e}_2 \times \bar{e}_3 = -\bar{e}_1;\ \bar{e}_3 \times \bar{e}_1 = -\bar{e}_2;\ \bar{e}_3 \times \bar{e}_2 = \bar{e}_1.$$

Для запису векторного добутку базисних векторів однією формулою для будь-якого ортонормованого базису $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ введемо величину

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, \text{ коли базис } (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \text{ правий;} \\ -1, \text{коли базис } (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \text{лівий.} \end{cases}$$

Тепер введемо величини

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} \varepsilon, \text{ коли перестановка } i, j, k \text{ парна;} \\ -\varepsilon, \text{ коли перестановка } i, j, k \text{ непарна;} \\ 0, \text{ коли серед чисел } i, j, k \text{ є два рівних числа.} \end{cases}$$

Величини $\varepsilon_{ijk}$ залежать від вибору базиса. Вони називаються *кососиметричними символами Кронекера.*

За допомогою величин $\varepsilon_{ijk}$ векторний добуток базисних векторів $\bar{e}_i$, $\bar{e}_j$ при будь-якій орієнтації базиса записується так:

$$\bar{e}_i \times \bar{e}_j = \varepsilon_{ijk}\bar{e}_k, \qquad (10)$$

де в правій частині проводиться підсумовування по індексу $k$. Цю формулу легко довести безпосередньою перевіркою. Наприклад, при $i = 1$, $j = 2$ маємо:

$$\bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \varepsilon_{12k}\bar{e}_k = \varepsilon_{121}\bar{e}_1 + \varepsilon_{122}\bar{e}_2 + \varepsilon_{123}\bar{e}_3 = \varepsilon_{123}\bar{e}_3 = \varepsilon\bar{e}_3.$$

Отже, для правої системи $\bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \bar{e}_3$, а для лівої системи $\bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = -\bar{e}_3$.

Нехай тепер $\bar{x} = x_i\bar{e}_i$, $\bar{y} = y_j\bar{e}_j$ – два довільних вектори. Тоді

$$\bar{x} \times \bar{y} = (x_i\bar{e}_i) \times (y_j\bar{e}_j) = x_i y_j(\bar{e}_i \times \bar{e}_j) = \varepsilon_{ijk}x_i y_j\bar{e}_k, \qquad (11)$$

де в правій частині підсумовування проводиться по всіх індексах $i$, $j$, $k$. Якщо опустити нульові доданки, то одержимо

$$\bar{x} \times \bar{y} = \varepsilon\left[(x_2y_3 - x_3y_2)\bar{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\bar{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\bar{e}_3\right].$$

Використовуючи визначники третього порядку, маємо

$$\bar{x} \times \bar{y} = \varepsilon\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Наприклад, якщо $\bar{x} = (1, 2, -1)$, $\bar{y} = (3, 0, 2)$ і базис $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ правий, то

$$\bar{x} \times \bar{y} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \bar{e}_1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \bar{e}_2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \bar{e}_3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 4\bar{e}_1 - 5\bar{e}_2 - 6\bar{e}_3.$$

**1.2.3.** *Мішаним добутком* упорядкованої трійки векторів $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ називається скалярний добуток векторного добутку $\bar{x} \times \bar{y}$ і вектора $\bar{z}$. Позначення: $(\bar{x} \times \bar{y})\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Мішаний добуток векторів має наступні властивості:

1) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = -(\bar{y}, \bar{x}, \bar{z})$;

2) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{z}, \bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{z}, \bar{x})$;

3) $(c\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = c(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$;

4) $(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}) = (\bar{x}, \bar{z}, \bar{u}) + (\bar{y}, \bar{z}, \bar{u})$;

5) модуль мішаного добутку векторів $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, віднесених до спільного початку.

Перші чотири властивості доводяться, виходячи з означень мішаного, векторного і скалярного добутків. Доведемо властивість 5). Розглянемо три некомпланарних вектори $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, віднесених до спільного початку і побудуємо на них паралелепіпед (рис. 1.1).

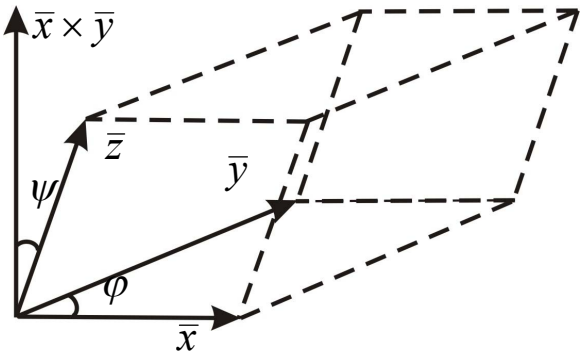



Рис. 1.1.

Об'єм паралелепіпеда $V = Sh$, де $S$ –площа основи, $h$ – висота. Але

$$S = |\bar{x}||\bar{y}| \cdot \sin\varphi = |\bar{x} \times \bar{y}|,$$

$$h = \left|np_{\bar{x}\times\bar{y}}\bar{z}\right| = |\bar{z}|\cos\psi,$$

$$V = |\bar{x} \times \bar{y}| \cdot |\bar{z}| \cdot \cos\psi = |(\bar{x} \times \bar{y}) \cdot \bar{z}|.$$

Як наслідок властивості 5) одержимо наступну властивість:

6) вектори $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Для мішаного добутку базисних векторів маємо

$$(\bar{e}_i, \bar{e}_j \bar{e}_k) = \varepsilon_{ijk}. \qquad (13)$$

Справді,

$$(\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_k) = (\bar{e}_i \times \bar{e}_j) \cdot \bar{e}_k = \varepsilon_{ijl}(\bar{e}_l \bar{e}_k).$$

В правій частині підсумовування проводиться по індексу $l$. Але скалярний добуток $\bar{e}_l \bar{e}_k = 1$ і рівність доведено.

Нехай тепер задано три довільних вектори $\bar{x} = x_i \bar{e}_i$, $\bar{y} = y_j \bar{e}_j$, $\bar{z} = z_k \bar{e}_k$. Тоді

$$(x, y, z) = (x_i \bar{e}_i, y_j \bar{e}_j, z_k \bar{e}_k) = x_i y_j z_k (\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_k) = \varepsilon_{ijk} x_i y_j z_k, \qquad (14)$$

де індекси $i, j, k$ незалежно один від одного приймають значення 1, 2, 3. Отже, в правій частині стоїть сума $3^3 = 27$ доданків. Але з них лише 6 відмінні від нуля, бо в інших доданків величини $\varepsilon_{ijk}$ мають 2 рівних індекси і тому дорівнюють нулю. Тоді сума набирає вигляду

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \varepsilon(x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3).$$

Отже,

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \varepsilon \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Одержали формулу для практичного обчислення мішаного добутку трьох векторів, заданих координатами в ортонормованому базисі.

Наприклад, якщо $\bar{x} = (2, -1, 3)$, $\bar{y} = (0, 1, 4)$, $\bar{z} = (3, 2, 1)$ і базис $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ правий, то

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 12 - 9 - 16 = -35.$$

## Задачі

**1.1.** Нехай вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ лінійно незалежні. Визначити, при якому значенні параметра $\lambda$ наступні пари векторів колінеарні:

1) $2\bar{a} + \lambda\bar{b}$, $-\bar{a} + \bar{b}$;
2) $\lambda\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} + \lambda\bar{b}$.

**1.2.** Нехай вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ лінійно незалежні. Знайти значення параметра $\lambda$, при якому вектори $\bar{x} = 2\bar{a} + 4\bar{b} + \lambda\bar{c}$ та $\bar{y} = -\bar{a} + \lambda\bar{b} + \bar{c}$ колінеарні.

**1.3.** Нехай вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ лінійно незалежні. Знайти значення параметра $\lambda$, при якому вектори $\bar{x} = 3\bar{a} + \bar{b} + \lambda\bar{c}$, $\bar{y} = \bar{a} - 2\bar{b} + \lambda\bar{c}$, $\bar{z} = \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$ компланарні.

**1.4.** Нехай задано вектори у правому ортонормованому базисі $\bar{a} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$, $\bar{b} = 4\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 + 6\bar{e}_3$, $\bar{c} = 3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{d} = 6\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 + 4\bar{e}_3$. Знайти:

1) $\bar{a} + 2\bar{b} - 3\bar{c} + \bar{d}$;
2) кути, які утворюють вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ з вісями координат;
3) довжини векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$;
4) скалярний добуток $(\bar{a} + \bar{b})\cdot(\bar{c} + \bar{d})$;
5) кути, які утворює вектор $\bar{a}$ з векторами $\bar{b}$, $\bar{c}$ і $\bar{d}$;

6) векторні добутки $\bar{a}\times\bar{b}$, $\bar{a}\times\bar{c}$, $\bar{b}\times\bar{c}$ і кути, які вони утворюють з вектором $\bar{d}$;

7) площі паралелограмів, побудованих на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, $\bar{c}$ і $\bar{d}$;

8)довести, що вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ лежать в одній площині.

**1.5.** Нехай задано вектори в ортонормованому базисі $\bar{a}=\bar{e}_1+2\bar{e}_2+3\bar{e}_3$, $\bar{b}=4\bar{e}_1+5\bar{e}_2$, $\bar{c}=3\bar{e}_1+2\bar{e}_2+\bar{e}_3$. Побудувати ці вектори та вказати праву чи ліву систему вони утворюють. Визначити:

1) об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах;

2) площу діагонального перерізу паралелепіпеда, проведеного через вектор $\bar{a}$.

**1.6.** Обчислити всі кососиметричні символи Кронекера $\varepsilon_{ijk}$ для правого і лівого базисів.

**1.7.** Довести тотожність Лагранжа: $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{c}\times\bar{d})=\begin{vmatrix}\bar{a}\bar{c} & \bar{a}\bar{d}\\ \bar{b}\bar{c} & \bar{b}\bar{d}\end{vmatrix}$.

**1.8.** Довести тотожність Якобі:

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})+\bar{b}\times(\bar{a}\times\bar{c})+\bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b})=\bar{0}.$$

**1.9.** Центр мас $C$ деякої системи матеріальних точок відносно початку відліку $O$ визначається радіусом-вектором

$$\bar{r}_i=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},$$

де $m_i$ – маси точок, $\bar{r}_i$ – радіуси-вектори точок. Знайти:

1) центр мас точок, розташованих у вершинах квадрата зі стороною $a$ і масами 1, 2, 3, 4 грами;

2) центр мас точок, розташованих у вершинах куба з ребром $a$ і масами 1, 2, 3, 4 грами (нижня основа) та 5, 6, 7, 8 грамів (верхня основа);

3) де буде центр мас куба, якщо в його вершинах, симетричних відносно центра куба, знаходяться однакові маси?

**1.10.** Нехай в точках простору, заданих своїми радіусами-векторами $\bar{r}_1,\bar{r}_2,...,\bar{r}_n$ відносно деякої точки $O$ розташовані електричні заряди $q_1$, $q_2$, …, $q_n$. *Діпольним моментом* цієї системи зарядів

відносно початку $O$ називається вектор $\bar{p} = \sum_{i=1}^{n} q_i \bar{r}_i$. *Центром зарядів* (по аналогії з центром мас) цієї системи називається точка $C$, що визначається радіусом-вектором

$$\bar{R} = \frac{\bar{p}}{\sum_{i=1}^{n} q_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} q_i}.$$

Точку $C$ можна визначити, якщо $\sum_{i=1}^{n} q_i \neq 0$. Якщо $\sum_{i=1}^{n} q_i = 0$, то система зарядів нейтральна.

1. Довести, що діпольний момент нейтральної системи не залежить від початку $O$, відносно якого він обчислюється.
2. Виразити діпольний момент через центри систем додатних і від'ємних зарядів, що утворюють нейтральну систему.

## §2. Перехід від одного ортонормованого базису простору до іншого. Основна задача тензорного числення

**2.1.** Нехай у просторі задано два ортонормовані базиси $(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3)$ та $(\bar{e}_1',\ \bar{e}_2',\ \bar{e}_3')$ зі спільним початком. Вектори кожного з цих базисів можна однозначно виразити через вектори іншого базису. Нехай

$$\begin{aligned} \bar{e}_1' &= t_{11}\bar{e}_1 + t_{12}\bar{e}_2 + t_{13}\bar{e}_3 \\ \bar{e}_2' &= t_{21}\bar{e}_1 + t_{22}\bar{e}_2 + t_{23}\bar{e}_3 \\ \bar{e}_3' &= t_{31}\bar{e}_1 + t_{32}\bar{e}_2 + t_{33}\bar{e}_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

Коротко рівності (1) можна записати так:

$$\bar{e}_i' = t_{ij}\bar{e}_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \qquad (2)$$

Матриця $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} = \left(t_{ij}\right)$ називається *матрицею переходу* від базису $(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3)$ до базису $(\bar{e}_1',\ \bar{e}_2',\ \bar{e}_3')$. Задача полягає в тому, щоб знайти елементи $t_{ij}$ цієї матриці. Для цього помножимо скалярно вектори $\bar{e}_i'$ на вектор $\bar{e}_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ і одержимо

$$t_{ij} = \bar{e}_i' \cdot \bar{e}_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{3}$$

Оскільки вектори $\bar{e}_i'$, $\bar{e}_j$ одиничні, то їх скалярний добуток дорівнюватиме косинусу кута між ними, тобто

$$t_{ij} = \cos(\hat{\bar{e}_i', \bar{e}_j}) \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{4}$$

Аналогічно можна виразити вектори базису ($\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$) через вектори базису ($\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$, $\bar{e}_3'$):

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= t_{11}'\bar{e}_1' + t_{12}'\bar{e}_2' + t_{13}'\bar{e}_3' \\ \bar{e}_2 &= t_{21}'\bar{e}_1' + t_{22}'\bar{e}_2' + t_{23}'\bar{e}_3' \\ \bar{e}_3 &= t_{31}'\bar{e}_1' + t_{32}'\bar{e}_2' + t_{33}'\bar{e}_3'. \end{aligned} \tag{5}$$

Або коротко

$$\bar{e}_i = t_{ij}'\bar{e}_j'. \tag{6}$$

При цьому елементи матриці переходу $T' = \left(t_{ij}'\right)$ від базису ($\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$, $\bar{e}_3'$) до базису ($\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$) обчислюються за формулами

$$t'_{ij} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j' = \cos(\hat{\bar{e}_i, \bar{e}_j'}) \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{7}$$

Порівнюючи (4) і (7), приходимо до висновку, що $t'_{ij} = t_{ji}$, тобто матриця $T'$ є транспонованою до матриці $T$. З іншого боку, з курсу лінійної алгебри відомо, що матриці $T$ і $T'$ є взаємно оберненими, тобто $T \cdot T' = E$.

Матриця, обернена до якої є її транспонованою, називається *ортогональною.* Таким чином маємо

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}, \quad T' = T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{pmatrix}.$$

Оскільки визначники взаємно транспонованих матриць рівні, то $|T| = |T'|$, $|T \cdot T'| = |E| = 1$, $|T|^2 = 1$, $|T| = \pm 1$.

Виходячи з рівності $T \cdot T' = E$, одержуємо наступні властивості ортогональних матриць:

1) сума квадратів елементів будь-якого рядка (стовпця) ортогональної матриці дорівнює одиниці;

2) сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) ортогональної матриці на відповідні елементи іншого рядка (стовпця) цієї матриці дорівнює нулю.

Таким чином, доведено, що перехід від одного ортогонального базису до іншого ортогонального базису задається ортогональною матрицею. Враховуючи властивість 2) ортогональних матриць робимо висновок про те, що кожна ортогональна матриця є матрицею переходу від одного ортогонального базису до іншого.

**Зауваження.** Порівнюючи формулу для обчислення мішаного добутку трьох векторів з визначником $|T|$, одержуємо рівність

$$|T| = (\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3') = \pm 1. \qquad (8)$$

Знак „+” буде тоді, коли базиси мають однакову орієнтацію, а „–”– коли різну.

Знайдемо зв’язок між координатами вектора $\bar{x}$ в різних ортонормованих базисах. Нехай $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ і $(\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3')$ – ортонормовані базиси, $T = (t_{ij})$ – матриця переходу від базису $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ до базису $(\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3')$ та $x = x_i \bar{e}_i$, $x = x_i' \bar{e}_i'$ – розклади вектора $\bar{x}$ в цих базисах. Тоді $\bar{e}_i' = t_{ij} \bar{e}_j$,

$$\bar{x} = x_i \bar{e}_i = x_i' \bar{e}' = x_i' t_{ij} \bar{e}_j \qquad (9)$$

У розгорнутому вигляді

$$x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 = x_1'(t_{11}\bar{e}_1 + t_{12}\bar{e}_2 + t_{13}\bar{e}_3) + x_2'(t_{21}\bar{e}_1 + t_{22}\bar{e}_2 + t_{23}\bar{e}_3) + \\ + x_3'(t_{31}\bar{e}_1 + t_{32}\bar{e}_2 + t_{33}\bar{e}_3)$$

Звідси:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' t_{11} + x_2' t_{21} + x_3' t_{31} \\ x_2 &= x_1' t_{12} + x_2' t_{22} + x_3' t_{32} \\ x_3 &= x_1' t_{13} + x_2' t_{23} + x_3' t_{33} \end{aligned} \qquad (10)$$

В матричному вигляді:

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1', x_2', x_3') \cdot T \qquad (11)$$

В скороченому вигляді:

$$x_i = x_j' t_{ji}. \qquad (12)$$

Домножимо рівність (11) справа на обернену матрицю $T^{-1}$ (вона є транспонованою до $T$). Одержимо:

$$(x_1', x_2', x_3') = (x_1, x_2, x_3) \cdot T^{-1}, \qquad (13)$$

або в скороченому вигляді

$$x_j' = x_i' t_{ji}. \qquad (14)$$

**Приклад.** Знайти координати вектора $\bar{x} = (1, 2, -1)$, заданого в ортонормованому базисі $(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3)$, в базисі $(\bar{e}'_1,\ \bar{e}'_2,\ \bar{e}'_3)$, матриця переходу до якого $T = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

**Розв'язання.** За умовою $\bar{e}'_1 = \frac{2}{3}\bar{e}_1 + \frac{2}{3}\bar{e}_2 - \frac{1}{3}\bar{e}_3$, $\bar{e}'_2 = \frac{2}{3}\bar{e}_1 - \frac{1}{3}\bar{e}_2 + \frac{2}{3}\bar{e}_3$, $\bar{e}'_3 = -\frac{1}{3}\bar{e}_1 + \frac{2}{3}\bar{e}_2 + \frac{2}{3}\bar{e}_3$. Легко перевірити, що $\bar{e}'_i \cdot \bar{e}'_j = 0$ при $i \neq j$ і $\bar{e}'_i \cdot \bar{e}'_i = 1$. Тому вектори $\bar{e}'_1$, $\bar{e}'_2$, $\bar{e}'_3$ утворюють ортонормований базис. За формулою (13) маємо:

$$(x'_1, x'_2, x'_3) = (1, 2, -1)\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \left(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Отже, в базисі $(\bar{e}'_1,\ \bar{e}'_2,\ \bar{e}'_3)$ вектор $\bar{x} = \left(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

**2.2.** Нехай у просторі задано вектор $\bar{x}$. Його можна інтерпретувати як деякий геометричний або фізичний об'єкт, що має величину і напрям (наприклад, сила, швидкість тощо). Цей реально існуючий об'єкт не залежить від того, в якій системі координат його розглядають.

Проте при застосуванні координатного методу з кожним вектором $\bar{x}$ зв'язують його координати $x_1$, $x_2$, $x_3$, які залежать як від самого вектора $\bar{x}$, так і від вибраної системи координат. Отже, при застосуванні координатного методу ми одержуємо дані, які характеризують і вектор, і вибрану систему координат. Але є факти (наприклад, сума квадратів координат дорівнює квадрату довжини вектора), які не залежать від вибору координат.

Властивості геометричних та фізичних об'єктів, які не залежать від вибору системи координат, в якій ці об'єкти досліджуються, називаються їх *інваріантними властивостями* або *інваріантами.*

Такі властивості заслуговують на першочергову увагу. Це і є основною задачею тензорного числення, а саме: розробити методи, які дозволяють відокремити результати, що відносяться до самих

геометричних (фізичних) об'єктів, від того, що залежить від вибору системи координат.

## Задачі

**2.1.** Нехай на площині задано два ортонормованих базиси $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ і $(\bar{e}_1', \bar{e}_2')$. Виразити вектори одного базису через вектори іншого та написати формули перетворення координат довільного вектора при переході від першого базису до другого, якщо:

1) вектори другого базису одержані з векторів першого базису шляхом повороту на кут $\alpha$=30° і перенумерацією векторів;
2) $\bar{e}_1' = -\bar{e}_2$, $\bar{e}_2' = \bar{e}_1$.

**2.2.** Написати матрицю переходу від ортонормованого базису $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ до ортонормованого базису $(\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3')$, якщо:

1) $\bar{e}_1'=\bar{e}_2$, $\bar{e}_2'=\bar{e}_1$, $\bar{e}_3'=\bar{e}_3$;
2) $\bar{e}_1'=\bar{e}_3$, $\bar{e}_2'=\bar{e}_1$, $\bar{e}_3'=\bar{e}_2$.

**2.3.** Як зміниться матриця переходу від одного базису до іншого, якщо:

1) поміняти місцями два вектори першого базису;
2) поміняти місцями два вектори другого базису;
3) записати вектори обох базисів у зворотному порядку.

**2.4.** Довести ортогональність матриць:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

## §3. Скалярні функції векторних аргументів. Полілінійні форми

Розглянемо найпростіші скалярні функції одного та декількох векторних аргументів.

**3.1. Лінійні форми.** Будемо говорити, що в лінійному просторі $L$ задана *скалярна функція* $\varphi = \varphi(\bar{x})$ *векторного аргументу* $\bar{x}$, якщо кожному вектору $\bar{x} \in L$ ставиться у відповідність деяке число. Ця функція називається *лінійною функцією* або *лінійною формою*, якщо вона задовольняє умови:

1) $\forall \bar{x}, \bar{y} \in L\ (\varphi(\bar{x} + \bar{y}) = \varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{y}))$;

2) $\forall \bar{x} \in L\ \ \forall c \in R\ (\varphi(c\bar{x}) = c\varphi(\bar{x}))$.

Розглянемо деякі приклади лінійних форм.

**1.** Позначимо $np_l\bar{x}$ проекцію (в алгебраїчному розумінні) вектора $\bar{x}$ на вісь $l$. Оскільки

$$np_l(\bar{x} + \bar{y}) = np_l\bar{x} + np_l\bar{y},\ \ np_l(c\bar{x}) = c \cdot np_l\bar{x},$$

то $np_l\bar{x}$ є лінійною формою вектора $\bar{x}$.

**2.** Нехай $\bar{a}$ – постійний, а $\bar{x}$ – змінний вектори. Тоді їх скалярний добуток є скалярною лінійною функцією (лінійною формою), оскільки

$$\bar{a}(\bar{x} + \bar{y}) = \bar{a}\bar{x} + \bar{a}\bar{y},\ \ \bar{a}(c\bar{x}) = c(\bar{a}\bar{x}).$$

**3.** Нехай $\bar{a}$ і $\bar{b}$ – фіксовані вектори простору, а $\bar{x}$ – змінний вектор. Тоді мішаний добуток $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x})$ є лінійною формою, оскільки

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x} + \bar{y}) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}) + (\bar{a}, \bar{b}, \bar{y}),\ \ (\bar{a}, \bar{b}, c\bar{x}) = c(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}).$$

Знайдемо вигляд лінійної форми $\varphi(\bar{x})$ в ортонормованому базисі $(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3)$. Оскільки $\bar{x} = x_i\bar{e}_i$, то

$$\varphi(\bar{x}) = \varphi(x_i\bar{e}_i) = x_i\varphi(\bar{e}_i) = a_i x_i, \qquad (1)$$

де $a_i = \varphi(\bar{e}_i)$. Таким чином, $\varphi(\bar{x})$ є однорідним многочленом першого степеня від змінних $x_1$, $x_2$, $x_3$. В алгебрі многочленів такі многочлени називають лінійними формами. Звідси і походить назва для лінійних скалярних функцій векторного аргументу.

Перейдемо до нового ортонормованого базису $(\bar{e}_1',\ \bar{e}_2',\ \bar{e}_3')$ та дослідимо коефіцієнти форми $\varphi(\bar{x})$ в цьому базисі. Маємо:

$$\bar{e}_i' = t_{ij}\bar{e}_j\ \ (i, j = 1, 2, 3), \qquad (2)$$

де $(t_{ij})$ – матриця переходу від старого базису до нового. В новому базисі форма $\varphi(\bar{x}) = a_i'x_i'$, де $x_i'$ – нові координати, а коефіцієнти $a_i'$ обчислюються за формулами

$$a_i' = \varphi(\bar{e}_i') = \varphi(t_{ij}\bar{e}_j) = t_{ij}\varphi(\bar{e}_j) = t_{ij}a_j \qquad (3)$$

Отже,

$$a_i' = t_{ij}a_j. \qquad (4)$$

Тобто, закон зміни коефіцієнтів лінійної форми при переході до нового базису збігається з законом зміни координат вектора. Це забезпечує рівність $a'_i x'_i = a'_i x_i$.

Оскільки

$$a_i \bar{e}_i = a'_i \bar{e}'_i, \qquad (5)$$

то коефіцієнти $a_i$ лінійної форми $\varphi(\bar{x})$ є координатами деякого вектора $\bar{a} = a_i \bar{e}_i$, а сама форма $\varphi(\bar{x}) = \bar{a} \cdot \bar{x}$.

Який же геометричний зміст вектора $\bar{a}$? Для відповіді на це запитання розглянемо поверхні рівня лінійної форми $\varphi$, що визначаються рівнянням $\varphi(\bar{x}) = c$, тобто $\bar{a}\bar{x} = c$. Легко зрозуміти, що це є рівняння родини паралельних площин, для яких вектор $\bar{a}$ є нормальним. Отже, вектор $\bar{a}$ є нормальним вектором до всіх площин, які є поверхнями рівня форми $\varphi(\bar{x})$.

**3.2. Білінійні форми.** Скалярна функція $\varphi = \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ двох векторних аргументів називається *білінійною функцією* або *білінійною формою*, якщо вона лінійна по кожному аргументу, тобто виконуються умови:

1) $\varphi(\bar{x}_1 + \bar{x}_2, \bar{y}) = \varphi(\bar{x}_1, \bar{y}) + \varphi(\bar{x}_2, \bar{y})$;
2) $\varphi(c\bar{x}, \bar{y}) = c\varphi(\bar{x}, \bar{y})$;
3) $\varphi(\bar{x}, \bar{y}_1 + \bar{y}_2) = \varphi(\bar{x}, \bar{y}_1) + \varphi(\bar{x}, \bar{y}_2)$;
4) $\varphi(\bar{x}, c\bar{y}) = c\varphi(\bar{x}, \bar{y})$.

Прикладами білінійних форм є: скалярний добуток $\bar{x} \cdot \bar{y}$ двох векторів; мішаний добуток $(\bar{a}, \bar{x}, \bar{y})$ фіксованого вектора $\bar{a}$ та двох змінних векторів $\bar{x}$, $\bar{y}$; добуток $\varphi(\bar{x})\psi(\bar{y})$ двох лінійних форм (виконання умов 1)-4) перевірити самостійно).

Розглянемо білінійну форму $\varphi = \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ в деякому ортонормованому базисі $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. Маємо:

$$\bar{x} = x_i \bar{e}_i, \quad y = y_j \bar{e}_j. \qquad (6)$$

Звідси

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(x_i \bar{e}_i, y_j \bar{e}_j) = x_i y_j \varphi(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = a_{ij} x_i y_j, \qquad (7)$$

де $a_{ij} = \varphi(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$. Розгорнутий запис має вигляд:

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{13}x_1y_3 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{23}x_2y_3 + \\ + a_{31}x_3y_1 + a_{32}x_3y_2 + a_{33}x_3y_3.$$

Многочлен у правій частині лінійний відносно $x_1, x_2, x_3$ та $y_1, y_2, y_3$.

З білінійною формою $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ тепер можна однозначно пов'язати матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (a_{ij}),$$

яка називається *матрицею білінійної форми* $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ у базисі $(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3)$.

Розглянемо матриці наведених вище прикладів білінійних форм.

Скалярний добуток $\bar{x}\,\bar{y}$ векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ в ортонормованому базисі записується так:

$$\bar{x}\,\bar{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Отже, матриця білінійної форми $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y}$ буде мати вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\delta_{ij}\right) = E.$$

Мішаний добуток $(\bar{a}, \bar{x}, \bar{y})$ в ортонормованому базисі записується так:

$$(\bar{a}, \bar{x}, \bar{y}) = \varepsilon_{kij} a_k x_i y_j.$$

Тому матриця білінійної форми $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{a}, \bar{x}, \bar{y})$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\varepsilon_{kij} a_k\right).$$

Білінійна форма $f(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(\bar{x}) \cdot \psi(\bar{y}) = a_i x_i \cdot b_j y_j = a_i b_j x_i y_j$ має матрицю

$$\left(a_i b_j\right) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}.$$

Дослідимо перетворення коефіцієнтів білінійної форми $\varphi = \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ при перетворенні базису. В новому базисі форма записується так:

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = a'_{ij} x'_i x'_j, \qquad (8)$$

де $a'_{ij} = \varphi(\bar{e}'_i, \bar{e}'_j)$. Але при переході до нового базису $\bar{e}'_i = t_{ij}\bar{e}_j$, $\bar{e}'_j = t_{jk}\bar{e}_k$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$, де $(t_{ij})$ – матриця переходу. Використовуючи властивості білінійної форми, одержимо:

$$a'_{ij} = \varphi(\bar{e}'_i, \bar{e}'_j) = \varphi(t_{ij}\bar{e}_j, t_{jk}\bar{e}_k) = t_{ij}t_{jk}\varphi(\bar{e}_j, \bar{e}_k) = t_{ij}t_{jk}a_{jk}.$$

Таким чином, при переході до нового базису коефіцієнти білінійної форми перетворюються за формулами

$$a'_{ij} = t_{ij}t_{jk}a_{jk}. \qquad (9)$$

Покажемо тепер, що має місце обернене твердження.

**Теорема.** *Якщо елементи $a_{ij}$ матриці $A$ при переході до нового ортонормованого базису простору $E_3$ перетворюються за формулами (9), то цій матриці відповідає деяка білінійна форма.*

***Доведення.*** Нехай ($\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$) і ($\bar{e}'_1$, $\bar{e}'_2$, $\bar{e}'_3$) – два ортонормовані базиси простору $E_3$ і $\bar{x}$ , $\bar{y}$ – два довільні вектори цього простору. Тоді

$$x = x_i\bar{e}_i = x'_i\bar{e}'_i,\ y = y_j\bar{e}_j = y'_j\bar{e}'_j.$$

Розглянемо білінійний вираз $\varphi = a_{ij}x_iy_j$. Доведемо, що цей вираз не змінюється при переході до іншого базису, тобто його значення залежить лише від вибору векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$. Після переходу до нового базису $\varphi$ перейде у $\varphi' = a'_{ij}x'_iy'_j$. Отже, треба довести, що $\varphi = \varphi'$. Враховуючи, що $\bar{e}'_i = t_{ij}\bar{e}_j$, $x'_i = x_jt_{ij}$, $y'_j = y_kt_{jk}$, маємо:

$$\varphi' = a'_{ij}x'_iy'_j = t_{ij}t_{jk}a_{jk}t_{ij}x_jt_{jk}y_k = t_{ij}t_{jk}t_{ij}t_{jk}a_{jk}x_jy_k = (t_{ij})^2(t_{jk})^2a_{jk}x_jx_k = a_{jk}x_jx_k.$$

Тут $(t_{ij})^2 = (t_{jk})^2 = 1$, бо матриця переходу $T$ ортогональна. Враховуючи, що змінні індекси, по яких проводиться підсумовування, можна „перейменувати”, маємо $\varphi' = a_{jk}x_jx_k = a_{ij}x_ix_j = \varphi$. Теорему доведено.

**Зауваження.** Одержана рівність легко перевіряється, коли $\varphi$ і $\varphi'$ записати у розгорнутому вигляді.

**3.3. Полілінійні форми.** Скалярна функція $\varphi = \varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_p)$ $p$ векторних аргументів називається *полілінійною функцією* або *полілінійною формою*, якщо вона лінійна по кожному з аргументів, тобто виконуються умови для довільного $i = \overline{1, p}$:

$$1)\ \varphi(\bar{x}_1,...,\bar{x}_{i-1},\bar{x}_i+\bar{y}_i,\bar{x}_{i+1},...,\bar{x}_p)=\varphi(\bar{x}_1,...,\bar{x}_{i-1},\bar{x}_i,\bar{x}_{i+1},...,\bar{x}_p)+$$
$$+\varphi(\bar{x}_1,...,\bar{x}_{i-1},\bar{y}_i,\bar{x}_{i+1},...,\bar{x}_p);$$
$$2)\ \varphi(\bar{x}_1,...,\bar{x}_{i-1},c\bar{x}_i,\bar{x}_{i+1},...,\bar{x}_p)=c\varphi(\bar{x}_1,...,\bar{x}_{i-1},\bar{x}_i,\bar{x}_{i+1},...,\bar{x}_p).$$

Число $p$ аргументів форми називається *степенем полілінійної форми*. Наприклад, при $p$=1 маємо форми 1 степеня (лінійні форми), а при $p$=3 одержимо форми 3 степеня (трилінійні форми).

Прикладом трилінійної форми є мішаний добуток $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ трьох векторів.

Прикладом форми 4 степеня є добуток $\psi(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{u})=\varphi_1(\bar{x})\cdot\varphi_2(\bar{y})\cdot\varphi_3(\bar{z})\cdot\varphi_4(\bar{u})$ лінійних форм $\varphi_1(\bar{x}),\varphi_2(\bar{y}),\varphi_3(\bar{z}),\varphi_4(\bar{u})$ (перевірити самостійно).

Розглянемо, як записується полілінійна форма в координатному вигляді для заданого ортонормованого базису $(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3)$.

Нехай $p$=3 і $\varphi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)=\varphi$ – трилінійна форма. Кожний з векторів $\bar{x}_i(i=1,2,3)$ можна розкласти за базисом:

$$\bar{x}_1=x_{1i}\bar{e}_i,\ \bar{x}_2=x_{2j}\bar{e}_j,\ \bar{x}_3=x_{3k}\bar{e}_k.$$

З лінійності форми $\varphi$ по кожному з аргументів $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3$ одержуємо

$$\varphi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)=\varphi(x_{1i}\bar{e}_i,x_{2j}\bar{e}_j,x_{3k}\bar{e}_k)=x_{1i}x_{2j}x_{3k}\varphi(\bar{e}_i,\bar{e}_j,\bar{e}_k).$$

Позначимо $a_{ijk}$ значення $\varphi(\bar{e}_i,\bar{e}_j,\bar{e}_k)$ форми $\varphi$ від векторів базису $(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3)$. Тоді матимемо запис для форми $\varphi$:

$$\varphi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)=a_{ijk}x_{1i}x_{2j}x_{3k}. \qquad (10)$$

Таким чином, трилінійна форма є однорідним многочленом третього степеня, лінійним відносно трьох груп змінних $(x_{11},x_{12},x_{13})$, $(x_{21},x_{22},x_{23})$, $(x_{31},x_{32},x_{33})$. Цей многочлен має $3^3$=27 доданків і стільки ж коефіцієнтів $a_{ijk}$.

**Зауваження.** Множину коефіцієнтів $a_{ijk}$ можна умовно мислити як просторову матрицю розмірів $3\times3\times3$ (див. рисунок 3.1).

В узлах цієї решітки записані коефіцієнти $a_{ijk}$ за таким принципом: в першій площині матриця $\begin{pmatrix}a_{111}&a_{112}&a_{113}\\a_{121}&a_{122}&a_{123}\\a_{131}&a_{132}&a_{133}\end{pmatrix}$; в другій площині

матриця $\begin{pmatrix} a_{211} & a_{212} & a_{213} \\ a_{221} & a_{222} & a_{223} \\ a_{231} & a_{232} & a_{233} \end{pmatrix}$; в третій площині матриця $\begin{pmatrix} a_{311} & a_{312} & a_{313} \\ a_{321} & a_{322} & a_{323} \\ a_{331} & a_{332} & a_{333} \end{pmatrix}$.

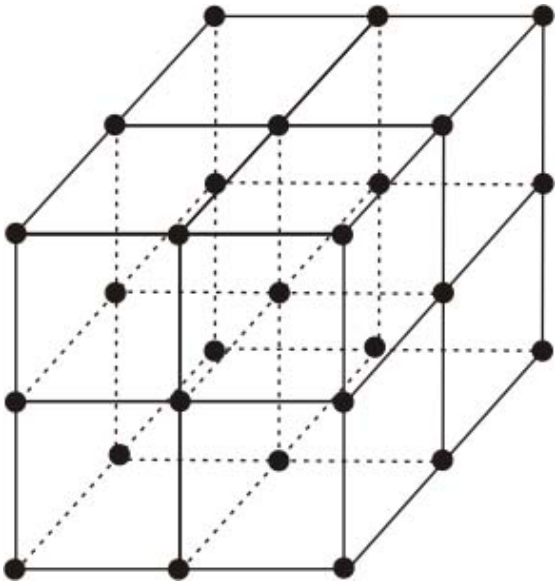


Рис. 3.1.

Аналогічно $p$-лінійна форма $\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_p)$ в базисі $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ записується у вигляді

$$\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_p) = a_{ijk...m} x_{1i} x_{2j} \cdot ... \cdot x_{pm}, \quad (11)$$

де $a_{ijk...m} = \varphi(e_i, e_j, e_k, ..., e_m)$ – значення $\varphi$ від $p$ базисних векторів. Коефіцієнти $a_{ijk...m}$ мають $p$ індексів, кожний з яких може незалежно від інших приймати 3 значення. Тому всього $p$- лінійна форма має $3^p$ коефіцієнтів. Їх теж можна мислити при $p \geq 3$ розтошованими по 9 елементів у $\frac{3^p}{3^2} = 3^{p-2}$ паралельних площинах у вигляді просторової матриці з розмірами $3 \times 3 \times 3^{p-2}$.

## Задачі

**3.1.** Нехай $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Перевірити, чи будуть лінійними формами наступні скалярні функції векторного аргументу:

1) $\varphi(\bar{x}) = 2x_1 - 3x_2 + x_3$;
2) $\varphi(\bar{x}) = x_1^2$;
3) $\varphi(\bar{x}) = c$, де $c$=*const*;
4) $\varphi(\bar{x}) = 3x_1 - 4x_1x_2 + 2x_3$.

Якщо функція $\varphi(\bar{x})$ є лінійною формою, то вказати вектор $\bar{a}$ такий, щоб $\varphi(\bar{x}) = \bar{a} \cdot \bar{x}$.

**3.2.** Записати мішаний добуток $(\bar{a},\ \bar{x},\ \bar{y})$ фіксованого вектора $\bar{a}$ та змінних векторів $\bar{x}$, $\bar{y}$ визначником третього порядку. Шляхом обчислення цього визначника знайти всі коефіцієнти білінійної форми $\varphi(\bar{x},\bar{y})=(\bar{a},\bar{x},\bar{y})$.

**3.3.** Нехай $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\bar{y}=(y_1,y_2,y_3)$. Перевірити, чи будуть білінійними формами наступні скалярні функції двох векторних аргументів:

1) $\varphi(\bar{x},\bar{y})=x_1+x_2+2y_1$;
2) $\varphi(\bar{x},\bar{y})=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$;
3) $\varphi(\bar{x},\bar{y})=c$, де $c$=*const*;
4) $\varphi(\bar{x},\bar{y})=2x_1-3x_2+4y_1-5y_3$.

**3.4.** В якому випадку функція $\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{u})=c$, де $c$=*const* є 4-лінійною формою?

**3.5.** Нехай $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\bar{y}=(y_1,y_2,y_3)$, $\bar{z}=(z_1,z_2,z_3)$. Перевірити, чи будуть трилінійними формами наступні скалярні функції трьох векторних аргументів:

1) $\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=2x_1+y_2+z_3$;
2) $\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=5x_1y_2z_3$;
3) $\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=x_1x_2^2+y_1+z_2+5z_3$;
4) $\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=6$.

## §4. Поняття тензора та його валентності

Полілінійні форми визначаються незалежно від вибору системи координат і їх значення залежать лише від значень їх векторних аргументів. Отже, кожна полілінійна форма визначена інваріантним способом.

Оскільки при переході до нового базису координати векторів змінюються, а сама форма – ні, то будуть змінюватись її координати. Множина коефіцієнтів полілінійної форми є важливим об'єктом, що має свою назву і цілий ряд цікавих властивостей і застосувань на практиці.

**Означення.** *Геометричний об'єкт, який визначається сукупністю коефіцієнтів* $a_{ijk\ldots m}$ *полілінійної форми* $\varphi(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_p)$ *записаної в деякому ортонормованому базисі, називається*

*ортогональним тензором. Числа* $a_{ijk...m}$ *називаються компонентами або координатами цього тензора.*

Термін „тензор” походить від латинського „tensio” – напруга, напруження.

Далі будуть розглядатись лише ортогональні тензори і тому їх називатимемо просто тензорами. При цьому будемо говорити, що тензор $a_{ijk...m}$ визначається $p$-лінійною формою $\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_p)$, обчислюється за формулою

$$a_{ijk...m} = \varphi(e_i, e_j, e_k, ..., e_m) \qquad (1)$$

і має $p$ індексів. Такий тензор називають *тензором валентності p.* Тензор валентності $p$ в тривимірному просторі $E_3$ має $3^p$ координат, на площині (у просторі $E_2$) – $2^p$ координат, а в просторі $E_n$ – $n^p$ координат.

Отже, сукупність коефіцієнтів $a_i$ лінійної форми $\varphi = \varphi(\bar{x})$ є тензор валентності *1*. Зокрема, оскільки лінійною формою є скалярний добуток фіксованого вектора $\bar{a}$ і змінного вектора $\bar{x}$, то набір координат вектора $\bar{a}$ є тензором валентності *1*. Тому часто кажуть, що вектор – це тензор валентності *1*. Тензором валентності *0* природно назвати будь-яке число (константу).

Тензором валентності *2* є сукупність коефіцієнтів $a_{ij}$ білінійної форми $\varphi = \varphi(\bar{x}, \bar{y})$, які утворюють матрицю $A = (a_{ij})$. Зокрема, тензором буде множина симетричних символів Кронекера $\delta_{ij}$, бо вони є коефіцієнтами білінійної форми $\varphi = \bar{x} \cdot \bar{y}$. Цей тензор називається *одиничним тензором* валентності *2*.

Кососиметричні символи Кронекера $\varepsilon_{ijk}$ – тензори валентності *3*. Вони є коефіцієнтами трилінійної форми $\varphi = \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Цей тензор називається *дискримінантним тензором.*

Два тензори називаються *рівними*, якщо рівні полілінійні форми, що їх визначають. Рівні тензори мають однакову валентність та рівні відповідні компоненти в будь-якій системі координат.

Тензор валентності $p$ називається *нульовим*, якщо коефіцієнти полілінійної форми, що його визначає, дорівнюють нулю.

Далеко не кожний набір з $3^p$ чисел є тензором валентності $p$. Наступна теорема встановлює необхідні і достатні умови для цього.

**Теорема.** *Сукупність величин* $a_{ijk\ldots m}$ *тоді і тільки тоді є тензором, коли при переході від одного ортонормованого базису до іншого вона змінюється по закону*

$$a'_{lrs\ldots u} = t_{li} \cdot t_{rj} \cdot t_{sk} \cdot \ldots \cdot t_{um} a_{ijk\ldots m}. \qquad (2)$$

***Доведення. Необхідність.*** Нехай $(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3)$ – перший базис, $(\bar{e}'_1,\ \bar{e}'_2,\ \bar{e}'_3)$ – другий базис і $T = \left(t_{ij}\right)$ – матриця переходу від першого базису до другого, тобто

$$\begin{aligned} \bar{e}'_1 &= t_{11}\bar{e}_1 + t_{12}\bar{e}_2 + t_{13}\bar{e}_3 \\ \bar{e}'_2 &= t_{21}\bar{e}_1 + t_{22}\bar{e}_2 + t_{23}\bar{e}_3 \\ \bar{e}'_3 &= t_{31}\bar{e}_1 + t_{32}\bar{e}_2 + t_{33}\bar{e}_3. \end{aligned} \qquad (3)$$

Нехай $a_{ijk\ldots m}$ – тензор. Тоді величини $a_{ijk\ldots m}$ є коефіцієнтами полілінійної форми $\varphi\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p\right)$, тобто

$$a_{ijk\ldots m} = \varphi\left(\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_k, \ldots, \bar{e}_m\right) \qquad (4)$$

в базисі $(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3)$. Аналогічно в базисі $(\bar{e}'_1,\ \bar{e}'_2,\ \bar{e}'_3)$ маємо

$$a'_{lrs\ldots u} = \varphi\left(\bar{e}'_l, \bar{e}'_r, \bar{e}'_s, \ldots, \bar{e}'_u\right). \qquad (5)$$

Оскільки за умовою вектори другого базису виражаються через вектори першого базису за формулами (3) і кожний з індексів $i, j, k, \ldots, m$ може незалежно один від одного приймати значення з множини $\{1, 2, 3\}$, то можна записати рівності:

$$\bar{e}'_l = t_{li}\bar{e}_i,\ \bar{e}'_r = t_{rj}\bar{e}_j, \bar{e}'_s = t_{sk}\bar{e}_k, \ldots,\ \bar{e}'_u = t_{um}\bar{e}_m. \qquad (6)$$

Підставляючи значення з (6) у (5) та використовуючи полілінійність форми $\varphi$, одержимо:

$$\begin{aligned} a'_{lrs\ldots u} &= \varphi\left(\bar{e}'_l, \bar{e}'_r, \bar{e}'_s, \ldots, \bar{e}'_u\right) = \varphi\left(t_{li}\bar{e}_i, t_{rj}\bar{e}_j, t_{sk}\bar{e}_k, \ldots, t_{um}\bar{e}_m\right) = \\ &= t_{li}t_{rj}t_{sk} \cdot \ldots \cdot t_{um}\varphi\left(\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_k, \ldots, \bar{e}_m\right) = t_{li}t_{rj}t_{sk} \cdot \ldots \cdot t_{um}a_{ijk\ldots m}, \end{aligned}$$

що і треба було довести.

***Достатність.*** Нехай величини $a_{ijk\ldots m}$ при переході до нового базису перетворюються за формулами (2). Візьмемо довільні вектори $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p$. Їх розклади за новим і старим базисами записуються в такому вигляді:

$$\bar{x}_1 = x_{1i}\bar{e}_i = x'_{1i}\bar{e}'_i,\ \bar{x}_2 = x_{2j}\bar{e}_j = x'_{2j}\bar{e}'_j, \ldots,\ \bar{x}_p = x_{pm}\bar{e}_m = x'_{pm}\bar{e}'_m \qquad (7).$$

Щоб довести, що система величин утворює тензор, треба довести, що полілінійний вираз

$$\varphi = a_{ijk\ldots m}x_{1i}x_{2j}x_{3k}\ldots x_{pm} \qquad (8)$$

є полілінійною формою, тобто, що цей вираз залежить лише від вибору векторів $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_p$ і не залежить від вибору базиса.

Після перетворення базису вираз (8) перетворюється у вираз:

$$\varphi' = a'_{lrs...u} x'_{1l} x'_{2r} x'_{3s} ... x'_{pu}. \qquad (9)$$

Підставимо в (9) значення $a'_{lrs...n}$ з (2) і значення інших множників з наступних рівностей:

$$x'_{1l} = t_{li} x_{li},\ x'_{2r} = t_{rj} x_{rj},\ x'_{3s} = t_{sk} x_{sk}, ...,\ x'_{pu} = t_{um} x_{um}. \qquad (10)$$

Одержимо:

$$\varphi' = t_{li} t_{rj} t_{sk} ... t_{um} a_{ijk...m} t_{li} t_{rj} t_{sk} ... t_{um} x_{1i} x_{2j} x_{3k} ... x_{pm} =$$

$$= t_{li}^{\,2} t_{rj}^{\,2} t_{sk}^{\,2} ... t_{um}^{\,2} a_{ijk...m} x_{1i} x_{2j} x_{3k} ... x_{pm}.$$

Але матриця $T$ ортогональна. Тому сума квадратів елементів рядка або стовпця дорівнює одиниці. Звідси

$$\varphi' = a_{ijk...m} x_{1i} x_{2j} x_{3k} ... x_{pm} = \varphi.$$

Теорему доведено.

## Задачі

**4.1.** Нехай у просторі $E_3$ зафіксовано ортонормований базис $(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3)$ і нехай $\bar{x} = x_i \bar{e}_i$. Довести, що числа $x_{ij} = x_i x_j$ утворюють тензор валентності два.

**4.2.** Довести, що компоненти одиничного тензора $\delta_{ij}$ мають одні і ті ж значення в будь-якому ортонормованому базисі, тобто $\delta'_{i'j'} = \delta_{ij}$ при $i' = i, j' = j$.

**4.3.** Довести, що компоненти дискримінантного тензора $\varepsilon_{ijk}$ мають однакові значення в ортонормованих базисах однієї орієнтації і протилежні значення – у базисах різної орієнтації.

**4.4.** Довести, що сукупність величин $\alpha_{ijkl}$, яка визначається рівностями

$$\alpha_{ijkl} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k,\ \ j = l; \\ 0 & \text{в усіх інших випадках} \end{cases}$$

утворює тензор валентності чотири.

**4.5.** Нехай $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ – скалярна функція. З'ясувати, чи утворюють тензор величини $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ та величини $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$. Якщо так, то яку валентність мають ці тензори?

## §5. Алгебраїчні операції над тензорами

Над тензорами можна виконувати такі дії (алгебраїчні операції): *додавання тензорів однієї валентності, множення тензора на дійсне число, множення тензорів, згортання тензора, згортання добутку тензорів, перестановка індексів тензора.* Розглянемо означення та властивості цих операцій. Зауважимо, що результати цих операцій не залежать від вибору системи координат.

**5.1. Сума тензорів.** *Сумою тензорів* $a_{ijk\ldots m}$ *та* $b_{ijk\ldots m}$ *валентності p, що визначаються відповідно полілінійними формами* $\varphi = \varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p) = a_{ijk\ldots m} x_{1i} x_{2j} x_{3k} \ldots x_{pm}$ *та* $\psi = \psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p) = b_{ijk\ldots m} x_{1i} x_{2j} x_{3k} \ldots x_{pm}$, *називається тензор* $c_{ijk\ldots m}$, *що визначається формою* $\varphi + \psi$.

Оскільки $\varphi + \psi = (a_{ijk\ldots m} + b_{ijk\ldots m}) x_{1i} x_{2j} x_{3k} \ldots x_{pm}$, то

$$c_{ijk\ldots m} = a_{ijk\ldots m} + b_{ijk\ldots m}. \qquad (1)$$

Аналогічно означається різниця двох тензорів.

**Зауваження.** З означення 5.1 випливає, що додавання тензорів заданої валентності $p$ є алгебраїчною операцією, яка комутативна, асоціативна, є нульовий тензор і кожний тензор має собі протилежний. Отже, множина всіх тензорів валентності $p$ утворює адитивну абелеву групу.

**5.2. Множення тензора на число.** *Добутком числа c на тензор* $a_{ijk\ldots m}$, *що визначається полілінійною формою* $\varphi = a_{ijk\ldots m} x_{1i} x_{2j} x_{3k} \ldots x_{pm}$, *називається тензор* $b_{ijk\ldots m}$ *тієї ж валентності p, що визначається формою* $c\varphi$.

Оскільки $c\varphi = (c a_{ijk\ldots m}) x_{1i} x_{2j} x_{3k} \ldots x_{pm}$, то

$$b_{ijk\ldots m} = c\, a_{ijk\ldots m}. \qquad (2)$$

**Зауваження.** З означень 5.1 та 5.2 випливає, що множина тензорів валентності $p$ утворюють лінійний простір, ізоморфний лінійному простору полілінійних форм степеня $p$. Розмірність цих

просторів $3^p$. Такий простір називають *p-кратним тензорним добутком лінійного простору* $L_3$. Базис цього простору утворюють, наприклад, $3^p$ полілінійних форм вигляду

$$\varphi_{ijk\ldots m} = x_{1i}x_{2j}x_{3k}\ldots x_{pm}. \qquad (3)$$

**5.3. Добуток тензорів.** *Добутком тензора* $a_{ijk\ldots m}$ *валентності p, що визначається полілінійною формою* $\varphi = \varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p) = a_{ijk\ldots m}x_{1i}x_{2j}x_{3k}\ldots x_{pm}$, *на тензор* $b_{i_1 j_1 k_1 \ldots m_1}$ *валентності q, що визначається полілінійною формою* $\psi = \psi(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_q) = b_{i_1 j_1 k_1 \ldots m_1} y_{1i_1} y_{2j_1} y_{3k_1} \ldots y_{qm_1}$ *називається тензор* $c_{ijk\ldots m i_1 j_1 k_1 \ldots m_1}$, *що визначається полілінійною формою* $\varphi\psi$.

Оскільки $\varphi\psi = a_{ijk\ldots m}\, b_{i_1 j_1 k_1 \ldots m_1}\, x_{1i}x_{2j}x_{3k}\ldots x_{pm}\, y_{1i_1} y_{2j_1} y_{3k_1} \ldots y_{qm_1}$, то

$$c_{ijk\ldots m i_1 j_1 k_1 \ldots m_1} = a_{ijk\ldots m}\, b_{i_1 j_1 k_1 \ldots m_1} \qquad (3)$$

і має валентність $p + q$.

**Зауваження.** Множення тензорів некомутативне. Наприклад у п.3.2. ми побудували білінійну форму $f(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(\bar{x}) \cdot \psi(\bar{y})$ двох лінійних форм $\varphi(\bar{x}) = a_i x_i$ та $\psi(\bar{x}) = b_j y_j$. Вони визначають одновалентні тензори $a_i$ та $b_j$ відповідно і формі $f(\bar{x}, \bar{y})$ відповідає матриця $(a_i\, b_j)$. Але добутку $g(\bar{x}, \bar{y}) = \psi(\bar{y}) \cdot \varphi(\bar{x})$ відповідає матриця $(b_j\, a_i)$, яка є транспонованою до матриці $(a_i\, b_j)$. В загальному випадку ці матриці різні. отже, тензори $a_i\, b_j$ та $b_j\, a_i$ теж різні.

**5.4. Згортання тензора.** Нехай $\varphi = \varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_p)$ – полілінійна форма степеня $p$. Підставимо в неї замість яких-небудь двох аргументів базисні вектори. Нехай для визначності замість $\bar{x}_1$ підставляємо $\bar{e}_i$, а замість $\bar{x}_2$ підставляємо $\bar{e}_j$. Позначимо $\varphi(\bar{e}_i, \bar{e}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_p) = \varphi_{ij}$.

Вирази $\varphi_{ij}$ є лінійними функціями векторних аргументів $\bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_p$. Покажемо, як вони змінюються при зміні базиса. Нехай $\varphi(\bar{e}'_k, \bar{e}'_m, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_p) = \varphi'_{km}$. Покажемо, що $\varphi_{ij} = \varphi'_{km}$. Маємо $\bar{e}'_k = t_{ki}\bar{e}_i$, $\bar{e}'_m = t_{mj}\bar{e}_j$. Підставимо ці значення у $\varphi'_{km}$. Одержимо:

$$\varphi'_{km} = \varphi(t_{ki}\bar{e}_i, t_{mj}\bar{e}_j, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_p) = t_{ki}\, t_{mj}\, \varphi(\bar{e}_i, \bar{e}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_p).$$

Звідси при $i = j$ та $k = m$ та з урахуванням ортогональності матриці $T = (t_{ij})$ маємо рівність $\varphi'_{mm} = \varphi_{ii}$.

Це означає, що вираз $\varphi_{ii}$ не залежить від вибору базиса і тому є полілінійною формою від векторів $\bar{x}_3,...,\bar{x}_p$, тобто має степінь $p$–2.

В координатах запис форми $\varphi$ має вигляд $\varphi = \varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3,..., \bar{x}_p) = a_{ijk...m}\, x_{3k}...x_{pm}$. При $\bar{x}_1 = \bar{e}_i$, $\bar{x}_2 = \bar{e}_j$ буде $x_{1i} = 1$, $x_{1n} = 0$ при $n \neq i$ та відповідно $x_{2j} = 1$ і $x_{2n} = 0$ при $n \neq j$. Тому

$$\varphi_{ij} = \varphi(\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{x}_3,..., \bar{x}_p) = a_{ijk...m} x_{3k}...x_{pm}.$$

Звідси при $i = j$ маємо

$$\varphi_{ii} = a_{iik...m} x_{3k}...x_{pm}.$$

Отже, форма $\varphi_{ii}$ визначає тензор $b_{k...m}$ валентності $p$–2, координати якого виражаються через координати тензора $a_{ijk...m}$ за формулами

$$b_{k...m} = a_{iik...m} = a_{11k...m} + a_{22k...m} + a_{33k...m} \qquad (4).$$

Аналогічно визначається згортання тензора за будь-якою іншою парою індексів. Згортання можна повторювати декілька разів. В кінцевому результаті тензор парної валентності можна згорнути до тензора нульової валентності, тобто до інваріанта (константи), а непарної – до тензора першої валентності, що є вектором.

Наприклад, при згортанні тензора $a_{ijk}$ валентності 3, можливі такі випадки:

$$a_{iik} = b_k,\ a_{iji} = b_j,\ a_{ijj} = b_i.$$

**5.5. Згортання добутку тензорів.** Цю операцію розглянемо на прикладі тензорів валентності 2 і 3. Нехай є тензори $a_{ij}$ та $b_{klm}$. Утворимо їх добуток $a_{ij}b_{klm}$, який є тензором валентності 5. Згорнемо тепер цей добуток за індексами, що належать різним множникам, наприклад, за індексами $j$ та $k$. В результаті одержимо тензор

$$a_{ij}b_{jlm} = a_{i1}b_{1lm} + a_{i2}b_{2lm} + a_{i3}b_{3lm} \qquad (5)$$

валентності 3. Таку операцію називають *згортанням тензорів $a_{ij}$ та $b_{klm}$ за індексами j та k.*

**Приклад 1.** Нехай маємо одновалентні тензори $a_i$ та $b_j$. Згорнемо їх за індексами $i$ та $j$. Одержимо

$$a_ib_i = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Це не що інше як скалярний добуток векторів $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ та $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

**Приклад 2.** Нехай $a_{ijk}$ – довільний тензор валентності 3, а $\delta_{lm}$ – одиничний тензор валентності 2. Згорнемо їх за індексами $k$ та $l$. Одержимо

$$a_{ijk}\delta_{km} = a_{ij1}\delta_{1m} + a_{ij2}\delta_{2m} + a_{ij3}\delta_{3m} = a_{ijm},$$

оскільки $\delta_{km} = 1$ при $k = m$ і $\delta_{km} = 0$ при $k \neq m$.

**5.6. Перестановка індексів тензора.** Ця операція полягає в тому, що з тензора $a_{ijk\ldots m}$ утворюється новий тензор $b_{ijk\ldots m}$ тієї ж валентності і навіть з тими ж координатами, але з іншою нумерацією координат. Наприклад, координата, яка раніше була занумерована індексами $i, j, k, l, \ldots, m$ (індекс $i$ – перший, $j$ – другий, $k$ – третій і т.д.) після перестановки індексів за правилом: $j$ – на перше місце, $k$ – на друге місце, $i$ – на третє місце, всі інші індекси залишаються на місці, буде занумерована індексами в такому порядку: $j, k, i, l, \ldots, m$. В результаті одержимо новий тензор, який визначається формулою

$$a_{ijkl,\ldots m} = a_{jkil,\ldots m} \qquad (6)$$

Аналогічно можна здійснювати будь-яку іншу перестановку індексів.

**Зауваження.** Не треба думати, що операція перестановки індексів нічого не змінює. Тензор характеризується своїми координатами (компонентами) та їх нумерацією за допомогою впорядкованих наборів індексів. Тут повна аналогія з векторами. Наприклад, вектори $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ та $\bar{y} = (x_2, x_3, x_1)$ різні.

## Задачі

**5.1.** Нехай дано тензор $a_{ijk}$ третьої валентності і тензор $b_{lm}$ другої валентності. Одержати з них шляхом множення і згортання тензори валентностей 5, 3, 1.

**5.2.** Утворити скаляри шляхом згортання тензорів, матриці яких мають вигляд:

$$1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 6 & 3\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{pmatrix}5 & 0 & 1\\ 3 & 6 & 3\\ 4 & 5 & 4\end{pmatrix}; \qquad 3)\begin{pmatrix}3 & 5 & 3\\ 4 & 4 & 4\\ 3 & 2 & 6\end{pmatrix}.$$

**5.3.** Довести, що тензор $c_{ij}$ другої валентності тоді і тільки тоді є добутком двох тензорів першої валентності, коли його компоненти задовольняють рівняння

$$c_{ki}c_{lj} - c_{li}c_{kj} = 0.$$

**5.4.** Нехай задано тензор другої валентності $a_{ij}$, матриця якого в деякому базисі

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

та тензори першої валентності $x_i$, $y_i$, які в тому ж базисі мають координати $(x_i) = (2, 1, 4)$, $(y_i) = (3, 7, -1)$. Знайти:

1) $a_{ij}x_j$; 2) $a_{ij}x_i$; 3) $a_{ij}y_j$; 4) $a_{ij}y_i$; 5) $a_{ij}x_iy_j$;

6) $a_{ij}y_ix_j$; 7) $a_{ij}\delta_{ij}$; 8) $a_{ij} - \frac{2}{5}\delta_{ij}a_{ll}$; 9) $(a_{ij} - \frac{2}{5}\delta_{ij}a_{ll})x_i$; 10) $(a_{ij} - \frac{2}{5}\delta_{ij}a_{ll})x_ix_j$.

**5.5.** Нехай задано тензор другої валентності $a_{ij}$, матриця якого в деякому базисі $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

та вектор $\bar{x} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$. Знайти тензор, утворений множенням тензора $a_{ij}$ на вектор (тензор) $(x_k)$ з наступним згортанням:

1) по індексу вектора $(x_k)$;
2) по першому індексу тензора $a_{ij}$;
3) по другому індексу тензора $a_{ij}$.

**5.6.** Знайти скаляр, утворений множенням тензора $a_{ij}$ на вектори $\bar{x}$ та $\bar{y}$ з наступним згортанням:

1) по індексу вектора $\bar{x}$ і першому індексу тензора $a_{ij}$;
2) по індексу вектора $\bar{y}$ і другому індексу тензора, якщо тензор $a_{ij}$ і вектор $\bar{x}$ взяті з попередньої задачі, а вектор $\bar{y} = 4\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 + 6\bar{e}_3$.

## §6. Симетричні та кососиметричні тензори

**Означення 1.** *Тензор називається симетричним, якщо він не змінюється при перестановці місцями (транспозиції) будь-яких двох індексів.*

Наприклад, для одиничного тензора $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ і тому він симетричний, а його матриця має вигляд

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Взагалі, будь-який симетричний тензор $a_{ij}$ валентності 2 має симетричну матрицю

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Тому симетричний тензор $a_{ij}$ має лише 6 суттєвих координат.

**Означення 2.** *Тензор називається кососиметричним, якщо при перестановці місцями (транспозиції) будь-яких двох індексів його координати і сам тензор змінюють знак на протилежний.*

Розглянемо кососиметричний тензор $a_{ij}$ валентності 2. За означенням

$$a_{ij} = -a_{ji} \ \ (i, j = 1, 2, 3).$$

Його матриця буде кососиметричною і має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Кососиметричний тензор валентності 2 називають *бівектором.* Бівектор має лише 3 суттєвих координати.

Розглянемо кососиметричний тензор $a_{ijk}$ валентності 3. Його називають *тривектором.* Для будь-яких його індексів, наприклад, другого та третього, має місце рівність

$$a_{ijk} = -a_{ikj}.$$

Якщо ці індекси однакові, то

$$a_{ijj} = -a_{ijj}, \ \ a_{ijj} = 0.$$

Отже, у кососиметричного тензора координати, що мають хоча б два однакові індекси, дорівнюють нулю. Тому у тривектора є лише 6 координат, що можуть бути відмінні від нуля: $a_{123}$, $a_{213}$, $a_{231}$, $a_{321}$, $a_{132}$, $a_{312}$. При цьому за означенням тривектора маємо:

$$a_{123} = -a_{213} = a_{312} = -a_{321} = a_{231} = -a_{132}.$$

У зв’язку з цим говорять, що тривектор має лише одну суттєву координату, наприклад $a_{123}$.

**Приклад.** Мішаний добуток $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ є кососиметричною трилінійною формою, а тензор $\varepsilon_{ijk}$, що визначається цією формою, буде три вектором, що має одну суттєву координату $\varepsilon_{123} = \varepsilon$.

**Зауваження.** У просторі $L_3$ будь-який кососиметричний тензор має валентність не більше ніж 3. Точніше, будь-який кососиметричний тензор валентності $p \geq 4$ має всі нульові координати (є нульовим тензором).

Однією з найважливіших властивостей симетричних та кососиметричних тензорів є можливість подання довільних тензорів валентності 2 у вигляді суми симетричного та кососиметричного тензорів та можливість їх одержання з довільного тензору.

Нехай $a_{ij}$ – довільний тензор валентності 2. Тоді тензор $\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) = a_{(ij)}$ є симетричним, а тензор $\frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) = a_{[ij]}$ – кососиметричним і очевидно, що має місце рівність

$$a_{ij} = a_{(ij)} + a_{[ij]}.$$

При цьому говорять, що тензор $a_{(ij)}$ одержано з тензора $a_{ij}$ *симетризуванням*, а тензор $a_{[ij]}$ – *альтернуванням* тензора $a_{ij}$.

Нехай тепер $a_{ijk}$ – довільний тензор валентності 3. Тоді тензор

$$\frac{1}{6}(a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} + a_{jik} + a_{kji} + a_{ikj}) = a_{(ijk)}$$

є симетричним, а тензор

$$\frac{1}{6}(a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} - a_{jik} - a_{kji} - a_{ikj}) = a_{[ijk]}$$

є кососиметричним. Вони одержані з тензора $a_{ijk}$ відповідно симетризуванням і альтернуванням цього тензора.

## Задачі

**6.1.** Довести, що тензор $a_{ijk} = 0$, якщо він симетричний по індексах $i$ та $j$ і кососиметричний по індексах $j$ та $k$.

**6.2.** Довести, що коли тензор $a_{ijk}$ симетричний за індексами $i$ та $j$ ($a_{ijk} = a_{jik}$) і для будь-якого вектора $\bar{x} = x_i \bar{e}_i$ має місце рівність $a_{ijk}x_ix_jx_k = 0$, то $a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} = 0$.

**6.3.** Довести, що $a_{ij} \cdot b_{ij} = 0$, якщо тензор $a_{ij}$ симетричний, а тензор $b_{ij}$ кососиметричний.

**6.4.** Довести, що коли для тензора $a_{ij}$ і будь-якого вектора $\bar{x} = x_i \bar{e}_i$ має місце рівність $a_{ij}x_j = \lambda x_i$, де $\lambda$ не залежить від $\bar{x}$, то $a_{ij} = \lambda\delta_{ij}$.

**6.5.** Довести, що коли для тензора $a_{ijkl}$ і для будь-яких векторів $\bar{x} = x_i\bar{e}_i$, $\bar{y} = y_j\bar{e}_j$ має місце рівність $a_{ijkl}x_iy_jx_ky_l = 0$, то

$$a_{ijkl} + a_{jkli} + a_{klij} + a_{lijk} = 0.$$

Якщо додатково $a_{ijkl} + a_{jikl} = 0$, $a_{ijkl} + a_{ijlk} = 0$, $a_{(ijk)l} = 0$, то $a_{ijkl} = 0$.

**6.6.** Довести, що для тензора $a_{ijk}$ третьої валентності має місце рівність

$$a_{ijk} = a_{(ijk)} + a_{[ijk]} + \frac{2}{3}(a_{[ij]k} + a_{[kj]i}) + \frac{2}{3}(a_{(ij)k} - a_{k(ij)}).$$

**6.7.** Довести, що коли тензор $a_{ijk}$ симетричний по індексах $i$ та $j$, то

$$a_{(ijk)} = \frac{1}{3}(a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij}).$$

**6.8.** Довести, що коли тензор $a_{ijk}$ кососиметричний по індексах $i$ та $j$, то

$$a_{[ijk]} = \frac{1}{3}(a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij}).$$

**6.9.** Подати тензор $a_{ij}$, матриця якого $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, сумою $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, де $b_{ij} = a_{(ij)}$ – симетричний, а $c_{ij} = a_{[ij]}$ – кососиметричний тензори. Знайти:

1) $c_{ij}a_{ij}$; 2) $b_{ij}c_{ij}$; 3) $c_{ij}\delta_{ij}$; 4) $c_{ij}x_i$, де $\bar{x} = (x_i) = (2, 3, -4)$;

5) $c_{ij}x_ix_j$; 6) $b_{ij}\delta_{ij}$; 7) $b_{ij}x_i$; 8) $b_{ij}x_ix_j$.

## §7. Тензорні поля та їх диференціювання

Розглядаючи операції над тензорами, ми не ставили запитання в якій точці простору $E_3$ вони задані. Тому можна вважати, що вони були задані в деякій області $V \subset E_3$ (тут $V$ може змінюватись від однієї точки до всього простору), в якій задані одні і ті ж тензори. Але ж тензори можуть змінюватись при переході від однієї точки простору до іншої. Тому треба розглядати тензорні поля. Зрозуміло, що конкретні тензори поля можуть змінюватись з часом. Тому розглядаємо їх в певний момент часу.

**Означення 1.** *Будемо говорити, що в області* $V \subset E_3$ *задано тензорне поле, якщо кожній точці* $M \in V$ *поставлено у відповідність тензор однієї і тієї ж валентності. Цей тензор називається тензором поля.*

Тензор поля, взагалі кажучи, змінюється при переході від однієї точки області $V$ до іншої точки цієї області. Отже, тензор поля є функцією точки $M$ (або набору координат $(x_1, x_2, x_3)$ точки $M$ в деякому базисі), але його валентність залишається постійною. Ця валентність називається *валентністю тензорного поля.* Наприклад, якщо валентність тензорного поля дорівнює 3, то тензор

$$a_{ijk} = a_{ijk}(M) = a_{ijk}(x_1, x_2, x_3). \qquad (1)$$

Розглянемо найпростіші, але дуже важливі приклади тензорних полів.

**Приклад 1. Скалярне поле.** Так називається тензорне поле нульової валентності. Оскільки тензор нульової валентності є інваріантним, то для задання скалярного поля в області $V$ треба в кожній точці цієї області задати певне число $a$:

$$a = a(M) = a(x_1, x_2, x_3). \qquad (2)$$

Отже, скалярне поле задається деякою числовою функцією трьох аргументів. При цьому $a(M)$ залежить лише від вибору точки $M$ і не залежить від вибору системи координат.

Приклади скалярних полів:

1) поле температури нерівномірно нагрітого тіла;
2) поле тиску в атмосфері;
3) поле густини неоднорідного тіла;
4) поле потенціалу електростатичного поля.

**Приклад 2. Векторне поле.** Так називають поле тензора першої валентності:

$$a_i = a_i(M) = a_i(x_1, x_2, x_3). \qquad (3)$$

Координати одновалентного тензора $a_i$ завжди можна тлумачити як координати деякого вектора $\bar{a} = a_i \bar{e}_i$. Отже, рівності (3) показують, що векторне поле задається трьома функціями від трьох аргументів, які залежать лише від вибору точки і не залежать лише від вибору системи координат.

Приклади векторних полів:

1) поле швидкості руху газу або рідини;
2) поле густини електричного струму у провіднику великого перерізу;
3) електричне поле;

4) магнітне поле;

5) поле сил тяжіння, утворюваних деяким масивним тілом.

Зауважимо, що в застосуваннях, як правило, зустрічаються не окремі тензори, а тензорні поля. Тому алгебраїчні операції над тензорами переносяться і на тензорні поля. При цьому треба вважати, що вони виконуються над тензорами в кожній точці $M$ області $V$.

Наприклад, якщо в області задані тензорні поля $a_{ijk} = a_{ijk}(M)$, $b_{ijk} = b_{ijk}(M)$, $c_{ij} = c_{ij}(M)$, то додаючи компоненти тензорів $a_{ijk}$ та $b_{ijk}$ одержимо нове поле:

$$d_{ijk} = a_{ijk}(M)+b_{ijk}(M), \qquad (4)$$

яке є сумою двох перших тензорних полів. Якщо перемножимо компоненти першого і третього тензорів, то одержимо нове поле валентності 5:

$$g_{ijklm} = a_{ijk}(M)c_{lm}(M). \qquad (5)$$

Аналогічно розглядаються операції згортання тензорних полів та перестановки індексів в одному тензорному полі.

Але крім алгебраїчних операцій над тензорами поля можна проводити операцію диференціювання тензора поля (операцію диференціювання тензорного поля). Ця операція є основною в тензорному аналізі.

Розглянемо деяке тензорне поле, наприклад, поле валентності 3 в області $V \subset E_3$:

$$a_{ijk} = a_{ijk}(M)=a_{ijk}(x_1, x_2, x_3). \qquad (6)$$

З'ясуємо як змінюється цей тензор при переході від точки $M$ в нескінченно близьку до $M$ точку $M'$. Положення точки $M'$ відносно точки $M$ визначається вектором $d\bar{x}$. Його розклад за базисними векторами записується так:

$$d\bar{x} = dx_1\bar{e}_1 + dx_2\bar{e}_2 + dx_3\bar{e}_3 = dx_i\bar{e}_i. \qquad (7)$$

Перейдемо до нового ортонормованого базису $(\bar{e}_1',\ \bar{e}_2',\ \bar{e}_3')$. Маємо $\bar{e}_i' = t_{ij}\bar{e}_j$, де $(t_{ij})$ – матриця переходу від базису $(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3)$ до базису $(\bar{e}_1',\ \bar{e}_2',\ \bar{e}_3')$. Нехай в новому базисі $d\bar{x} = dx_i'\bar{e}_i'$. За доведеним раніше, зв'язок між координатами вектора $d\bar{x}$ в різних ортонормованих базисах виражається формулами

$$dx_i' = dx_j t_{ij}. \qquad (8)$$

Оскільки $\overline{OM'} = \overline{OM} + \overline{MM'}$, то в координатній формі маємо

$$x_i' = x_i + dx_i. \qquad (9)$$

Позначимо $\Delta a_{ijk}$ прирости, які одержать компоненти тензора $a_{ijk}$ при переході від точки $M$ до точки $M'$. Припустимо, що ці компоненти є диференційовними функціями від координат точки $M$. Тоді головні частини приростів можна записати так:

$$da_{ijk} = \frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l} dx_l . \qquad (10)$$

Покажемо, що сукупність величин $da_{ijk}$ утворює тензор третьої валентності. Справді, при переході до нового базису ($\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$, $\bar{e}_3'$) компоненти тензора $a_{ijk}$ перетворюються за формулами

$$a_{i'j'k'} = t_{i'i} t_{j'j} t_{k'k} a_{ijk} . \qquad (11)$$

Диференціюючи ці рівності почленно (тут $t_{s's}$ – константи), одержимо

$$da_{i'j'k'} = t_{i'i} t_{j'j} t_{k'k} da_{ijk} . \qquad (12)$$

Рівності (12) показують, що величини $da_{ijk}$ при заміні базису перетворюються по тензорному закону і тому за теоремою §4 самі є тензором. *Тензор з компонентами $da_{ijk}$ називають абсолютним диференціалом тензорного поля $a_{ijk}$.*

Таким чином, формули (10) показують, що при згортанні величин $\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l}$ з координатами довільного вектора $dx_l$ одержуємо тензор $da_{ijk}$.

За оберненою тензорною ознакою величини $\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l}$ самі утворюють тензор валентності 4 в точці $M$.

Такі міркування можна провести в кожній точці $M \in V$. Тому одержимо в області $V$ нове тензорне поле валентності 4, яке називається *абсолютною похідною тензорного поля $a_{ijk}$* і позначається

$$\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l} = a_{ijk,l} . \qquad (13)$$

За додатковий індекс $l$ на останньому місці (його рекомендується відділяти комою) вибирають індекс $l$ тієї координати $x_l$ точки $M$, по якій відбудеться диференціювання.

Таким чином, з (10) і (13) маємо

$$da_{ijk} = a_{ijk,l} dx_l . \qquad (14)$$

Ця рівність показує, що абсолютний диференціал тензора $a_{ijk}$ є результатом згортання тензора $dx_l$ і абсолютної похідної $a_{ijk,l}$ цього тензора.

Аналогічні міркування можна провести для тензорного поля будь-якої валентності. Отже, *сукупність всіх частинних похідних першого порядку від компонент даного тензорного поля по координатах $x_l$ тієї точки, в якій розглядається тензорне поле валентності p, утворює тензор валентності p+1, який є абсолютною похідною даного поля. Результат згортання цієї похідної по індексу, який виникає в процесі диференціювання, з координатами вектора $d\bar{x}$ є абсолютним диференціалом заданого векторного поля.*

**Зауваження 1.** Оскільки в прямокутній декартовій системі координат координати абсолютного диференціала і абсолютної похідної тензорного поля збігаються зі звичайними диференціалами і частинними похідними компонент вихідного поля, то правила абсолютного диференціювання будуть тими ж, що і для звичайного диференціювання.

**Зауваження 2.** Диференціюючи абсолютну похідну заданого поля, одержують абсолютний диференціал і абсолютну похідну другого порядку і т.д. Наприклад,

$$\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_m \partial x_l} = a_{ijk,lm}$$

є другою абсолютною похідною тензора $a_{ijk}$, яка уже є тензором п'ятої валентності. Згортаючи цей тензор з диференціалами $\partial x_l$ і $\partial x_m$, одержимо вираз для другого абсолютного диференціала тензора $a_{ij}$:

$$d^2 a_{ijk} = a_{ijk,l} dx_l dx_m .$$

Взагалі, *абсолютний диференціал порядку q від довільного, не менше ніж q разів диференційовного тензорного поля валентності p, є тензорним полем тієї ж валентності p, а його абсолютна похідна порядку q – тензорне поле валентності p+q.*

## §8. Криволінійні ортогональні координати

В попередніх міркуваннях ми положення точки на площині або в просторі визначали її прямокутними декартовими координатами.

Проте в багатьох випадках буває корисним визначити положення точки на площині яким-небудь іншим способом, іншими координатами. В загальному випадку координати називають *криволінійними*.

**8.1. Криволінійні координати на площині.** Криволінійна система координат на площині або в деякій області $D$ площини вводиться заданням двох функцій

$$x = h(u,v),\ y = g(u,v), \qquad (1)$$

які повинні мати неперервні частинні похідні по $u$ і $v$, а система рівнянь (1) повинна однозначно розв'язуватись відносно $u$ і $v$:

$$u = u(x, y),\ v = v(x, y). \qquad (2)$$

Таким чином, кожній парі чисел $(u,v)$ за формулами (1) відповідає точка $M(x, y)$ деякої області $D$ і навпаки, кожній точці $M(x, y)$ за формулами (2) відповідає пара чисел $(u,v)$. Тому $u$ і $v$ можна вважати новими координатами точки $M$.

Рівності (1) можна переписати у векторному вигляді, використовуючи той факт, що положення точки $M$ можна визначити її радіусом-вектором $\bar{r}$ відносно деякої фіксованої точки $O$, в якій задано ортонормований базис $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Тоді маємо:

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 = h(u, v)\bar{e}_1 + g(u, v)\bar{e}_2. \qquad (3)$$

Якщо в (3) зафіксувати значення $v$, то $\bar{r}$ буде функцією однієї змінної $u$ і при зміні $u$ опише деяку криву лінію в області $D$ (рис. 8.1).

Ця лінія називається *координатною лінією u*. Аналогічно зафіксувавши $u$ і змінюючи $v$, одержимо *координатну лінію v*. Через кожну точку $M_0(u_0,v_0)$ проходить одна координатна лінія $u$ при $v = v_0$ і одна координатна лінія $v$ при $u = u_0$. Тому область $D$ покривається сіткою ліній $u$ та $v$ (рис. 8.1). Навпаки, задання координатної сітки ліній цілком визначає криволінійну систему координат на площині. В загальному випадку ця сітка складається з кривих ліній. Тому координати $u$ і $v$ називаються *криволінійними*. Якщо ці лінії – прямі, то одержуємо декартову систему координат.

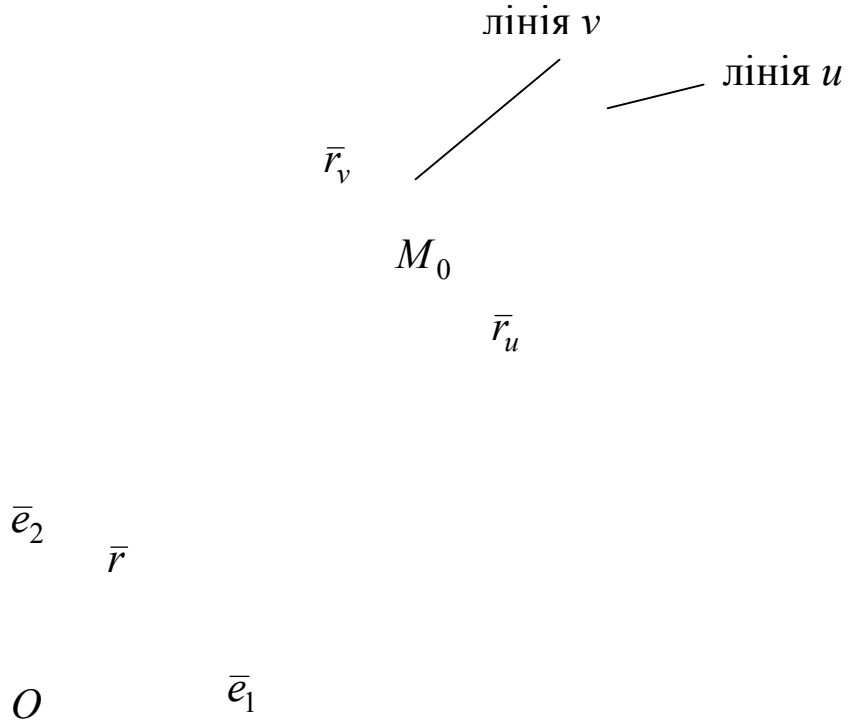



Рис. 8.1.

Типовим прикладом криволінійної системи координат є система паралелей і меридіанів на географічній карті.

Оскільки функції (1), а тому і радіус-вектор (3) вважаються неперервно диференційовними, то координатні лінії є гладкими, тобто мають в кожній точці дотичну, яка неперервно змінюється вздовж кривої. Дотичні вектори до координатних ліній визначаються похідними

$$\bar{r}_u = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial u}\bar{e}_1 + \frac{\partial g}{\partial u}\bar{e}_2, \quad \bar{r}_v = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \frac{\partial h}{\partial v}\bar{e}_1 + \frac{\partial g}{\partial v}\bar{e}_2. \qquad (4)$$

Як правило, ці вектори в кожній точці неколінеарні, тобто їх векторний добуток не дорівнює нулю:

$$\bar{r}_u \times \bar{r}_v \neq 0. \qquad (5)$$

**Зауваження.** Умова (5) в деяких точках площини не виконується. Ці точки називають *особливими* і в область $D$ їх не включають. В особливих точках порушується взаємно однозначна відповідність між точками і парами чисел: точці можуть відповідати декілька (і навіть безліч) пар чисел.

Криволінійна система координат називається *ортогональною*, якщо в кожній точці області координатна сітка ліній $u$ і $v$ ортогональна, тобто

$$\bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial v} = 0. \qquad (6)$$

Довжини векторів $\bar{r}_u$ та $\bar{r}_v$ ортогональної криволінійної системи координат називаються *коефіцієнтами Ляме* (Г. Ляме (1795–1870) – французький математик, інженер і фізик):

$$H_u = |\bar{r}_u| = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2}, \quad H_v = |\bar{r}_v| = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2}. \qquad (7)$$

Через коефіцієнти Ляме виражаються величини, пов'язані з вимірюванням довжин та площ. Квадрат елемента довжини в криволінійних ортогональних координатах має вигляд

$$ds^2 = H_u^2 du^2 + H_v^2 dv^2. \qquad (8)$$

Елемент площі має вигляд

$$d\sigma = H_u H_v du dv. \qquad (9)$$

Інтегруючи елемент довжини вздовж заданої кривої, одержують її довжину, а інтегруючи елемент площі по заданій області, знаходять її площу.

**Приклад 1.** Для полярної системи координат знайти координатну сітку, довести її ортогональність, обчислити коефіцієнти Ляме, елементи довжини та площі.

**Розв'язання.** Нехай $\rho$ – полярний радіус точки $M$, а $\varphi$ – полярний кут цієї точки. Тоді маємо $M(\rho,\varphi)$, де $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ (рис. 8.2). Радіус-вектор $\bar{r} = \bar{r}_x + \bar{r}_y = \rho\cos\varphi\bar{e}_1 + \rho\sin\varphi\bar{e}_2$.

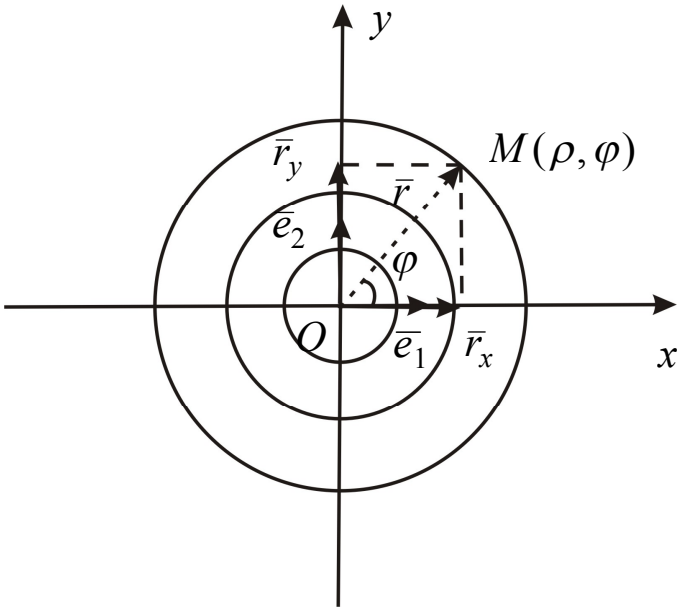



Рис. 8.2.

Фіксуємо першу координату $\rho = \rho_0$. Оскільки $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, то $x^2 + y^2 = \rho^2$ і тому при $\rho = \rho_0$ маємо $x^2 + y^2 = \rho_0^2$. Це буде коло радіуса $\rho_0$ з центром в початку координат. При $\varphi = \varphi_0$ маємо $y = tg\varphi_0 x$ – це рівняння променя, що виходить з початку координат під кутом $\varphi_0$ до вісі $Ox$.

Таким чином, координатна сітка полярної системи координат складається з концентричних кіл з центром $O$ та променів, що виходять з цієї точки. Оскільки радіус кола,

проведений в точку дотику, перпендикулярний до дотичної, то полярна система координат ортогональна.

Обчислимо коефіцієнти Ляме.

$$\bar{r}_\rho = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} = \cos\varphi \bar{e}_1 + \sin\varphi \bar{e}_2, \quad \bar{r}_\varphi = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \kappa} = -\rho \sin\varphi \bar{e}_1 + \rho \cos\varphi \bar{e}_2,$$

$$H_\rho = \left|\bar{r}_\rho\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1, \quad H_\varphi = \sqrt{\rho^2 \sin^2\varphi + \rho^2 \cos^2\varphi} = \rho.$$

Далі за формулами (8) і (9) маємо формули для обчислення елементів довжини та площі:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2, \quad d\sigma = \rho d\rho d\varphi.$$

**8.2. Криволінійні координати в просторі.** По аналогії з площиною криволінійну систему координат у просторі або в деякій просторовій області $V$ можна задати вектор-функцією

$$\bar{r} = \bar{r}(u,v,w) = x(u,v,w)\bar{e}_1 + y(u,v,w)\bar{e}_2 + z(u,v,w)\bar{e}_3. \qquad (10)$$

При цьому вважають, що кожній точці $M(x, y, z)$ з області $V$ відповідає лише одна трійка чисел $(u, v, w)$, тобто, що $x, y, z$ теж є однозначними функціями від $u, v, w$. Вважають також, що існують неперервні частинні похідні

$$\begin{aligned}
\bar{r}_u &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\bar{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial u}\bar{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial u}\bar{e}_3 \\
\bar{r}_v &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\bar{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial v}\bar{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial v}\bar{e}_3 \qquad (11) \\
\bar{r}_w &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial w} = \frac{\partial x}{\partial w}\bar{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial w}\bar{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial w}\bar{e}_3
\end{aligned}$$

З'ясуємо тепер геометричний зміст криволінійних координат. Для цього зафіксуємо по черзі $u = c_1$, $v = c_2$, $w = c_3$. Тоді кожне з рівнянь $u(x, y, z)=c_1$, $v(x, y, z)=c_2$, $w(x, y, z)=c_3$ у просторі визначає деяку поверхню. Ці поверхні називаються *координатними поверхнями* відповідно $u$, $v$ і $w$. Попарно перетинаючись, вони визначають *координатні лінії* $u$, $v$ і $w$, на кожній з яких змінюється лише одна координата. Наприклад, перетин координатних поверхонь $u$ та $v$ дає координатну лінію $w$. Дотичні до координатних ліній визначаються векторами $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, $\bar{r}_w$, які вважаються в області $V$ некомпланарними (рис. 8.3).

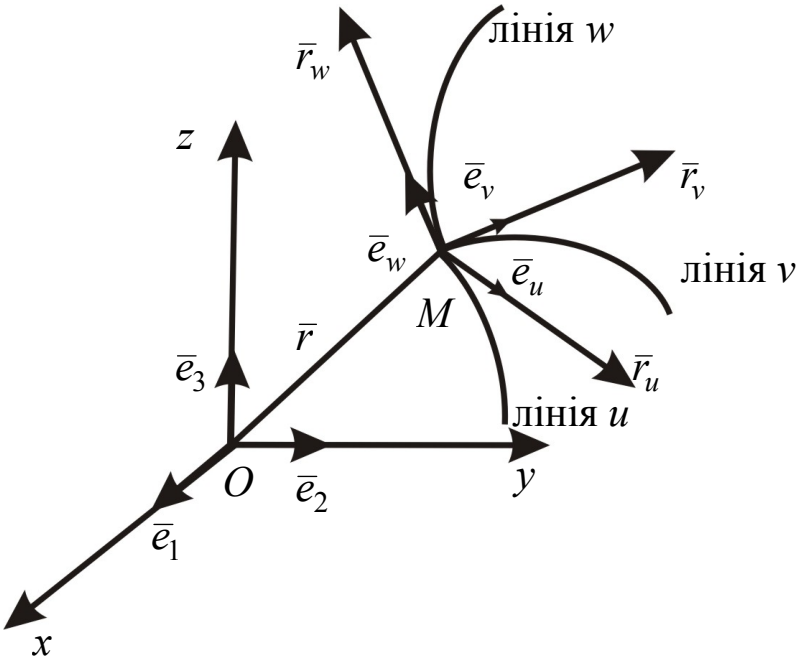



Рис. 8.3.

Криволінійні координати називаються *ортогональними*, якщо вектори $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, $\bar{r}_w$ попарно ортогональні, тобто

$$\bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_w = \bar{r}_v \cdot \bar{r}_w = 0. \qquad (12)$$

Нехай $\bar{e}_u$, $\bar{e}_v$, $\bar{e}_w$ – орти ортогональних векторів $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, $\bar{r}_w$. Тоді в кожній точці області $V$ вони утворюють ортонормовану трійку векторів, яку називають *локальним репером* (інша назва – *рухомий репер*).

Звертаємо увагу на те, що локальний репер змінюється при переході від однієї точки області $V$ до іншої.

Довжини векторів $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, $\bar{r}_w$ називаються *коефіцієнтами Ляме* (у просторі):

$$H_u = |\bar{r}_u| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}$$

$$H_v = |\bar{r}_v| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2} \qquad (13)$$

$$H_w = |\bar{r}_w| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2}$$

Квадрат елемента довжини в ортогональних координатах має вигляд

$$ds^2 = H_u^2 du^2 + H_v^2 dv^2 + H_w^2 dw^2 \qquad (14)$$

Зокрема, елемент довжини координатної лінії $u$ (тут $v=const$, $w=const$, $dv=dw=0$) дорівнює $ds_u=H_u du$. Аналогічно елементи довжини координатних ліній $v$ та $w$ відповідно дорівнюють $ds_v=H_v dv$, $ds_w=H_w dw$.

Елементи площ координатних поверхонь обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} &u = const: \quad d\sigma = ds_v ds_w = H_v H_w dv dw \\ &v = const: \quad d\sigma = ds_u ds_w = H_u H_w du dw \\ &w = const: \quad d\sigma = ds_u ds_v = H_u H_v du dv \end{aligned} \qquad (15)$$

Елемент об'єму обчислюється за формулою:

$$dV = ds_u ds_v ds_w = H_u H_v H_w du dv dw \qquad (16)$$

Розглянемо декілька прикладів криволінійних координат у просторі.

**Приклад 2.** Для прямокутної декартової системи координат знайти координатні поверхні, координатні лінії, обчислити коефіцієнти Ляме, елементи довжини, площі та об'єму.

**Розв'язання.** В прямокутних декартових координатах

$$\bar{r} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3 .$$

Тут $u = x$, $v = y$, $w = z$,

$$\bar{r}_u = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\bar{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial u}\bar{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial u}\bar{e}_3 = 1\cdot\bar{e}_1 + 0\cdot\bar{e}_2 + 0\cdot\bar{e}_3 = \bar{e}_1 ,\ \bar{r}_v = \bar{e}_2 ,\ \bar{r}_w = \bar{e}_3 .$$

Поверхні $u = x = const$, $v = y = const$, $w = z = const$ є площинами, паралельними відповідно координатним площинам $yOz$, $xOz$, $xOy$. Їх попарні перетини дадуть координатні лінії – це прямі, паралельні координатним вісям $Ox$, $Oy$, $Oz$. Їх перетин і є деякою точкою простору.

Коефіцієнти Ляме:

$$H_x = |\bar{r}_x| = 1, \quad H_y = |\bar{r}_y| = 1, \quad H_z = |\bar{r}_z| = 1.$$

Елемент довжини: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Елемент площі: $d\sigma = dxdy$, або $d\sigma = dydz$, або $d\sigma = dxdz$.

Елемент об'єму: $dV = dxdydz$.

**Приклад 3.** Окремим випадком криволінійних координат є *загальні циліндричні координати.* Вони утворюються додаванням до пари ортогональних криволінійних координат $u$ і $v$ на площині $xOy$ декартової координати $z$. В результаті одержуємо ортогональну систему координат у просторі. Вона може бути задана вектор-функцією

$$\bar{r} = \bar{r}(u,v,z) = h(u,v)\bar{e}_1 + g(u,v)\bar{e}_2 + z\bar{e}_3 . \qquad (17)$$

На кожній площині $z = const$, паралельній площині $xOy$, визначається координатна сітка ліній $u$ і $v$ така ж, як і на площині $xOy$ (рис.8.4). Координатними лініями $z$ є прямі, паралельні вісі $Oz$. Координатні поверхні $U = const$, $V = const$ – циліндричні поверхні, побудовані на сітці ліній $u$ і $v$ на площині $xOy$ з твірними, що паралельні вісі $Oz$, а $z = const$ – площини, паралельні площині $xOy$.

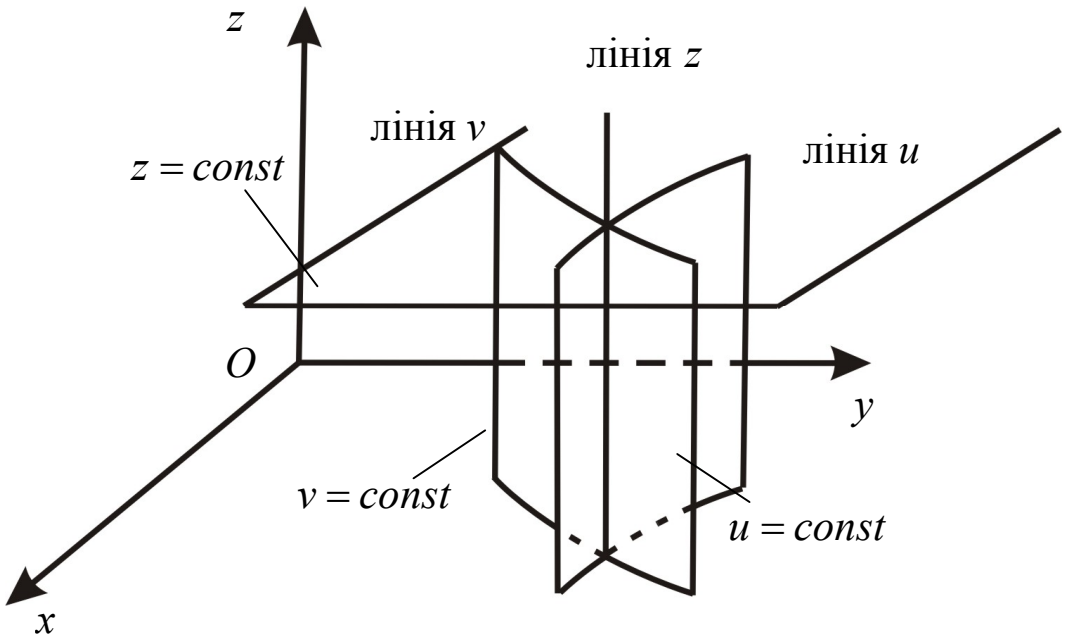



Рис 8.4.

Коефіцієнти Ляме обчислюються за формулами

$$H_u = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2}\ ,\ H_v = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2}\ ,\ H_z = 1 . \qquad (18)$$

Серед загальних циліндричних координат виділяються їх конкретні типи (полярні, еліптичні, параболічні і т.д.).

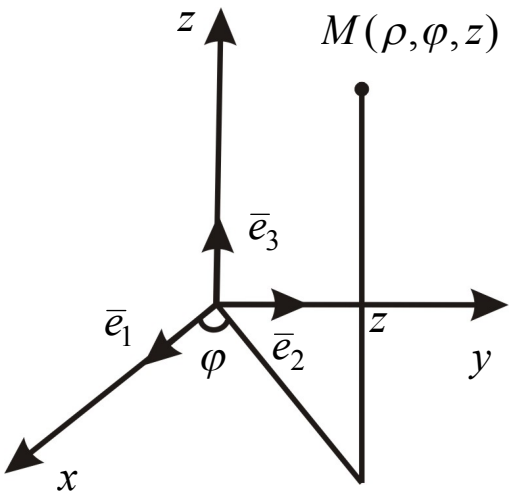



Рис. 8.5.

**Приклад 4.** Якщо в прямокутній системі координат $Oxyz$ замість перших двох координат $x$, $y$ взяти полярні координати $\rho$ і $\varphi$, а третю координату $z$ залишити, то дістанемо *циліндричну систему координат*, яку називають просто циліндричною (рис. 8.5).

Залежності між прямокутними координатами точки $M(x, y, z)$ та її циліндричними координатами $M(\rho, \varphi, z)$ характеризуються формулами:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z, \qquad (19)$$

де $0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty$.

Таким чином, кожній трійці чисел ($\rho$, $\varphi$, $z$) з заданими вище умовами відповідає деяка точка $M$ простору і навпаки, кожній точці $M$ простору, крім точок вісі $Oz$, відповідає лише одна трійка чисел ($\rho$, $\varphi$, $z$). Якщо точка $M$ лежить на вісі $Oz$, то її координати $\rho = 0$, і $z$ визначаються однозначно, а координата $\varphi$ може бути будь-якою. Тому вісь $Oz$ складається з особливих точок простору.

Циліндричну систему координат можна задати вектор-функцією

$$\bar{r} = \rho\cos\varphi\bar{e}_1 + \rho\sin\varphi\bar{e}_2 + z\bar{e}_3, \qquad (20)$$

де $\rho \ge 0,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty$.

Координатними поверхнями в циліндричній системі координат є: при $\rho = const$ – кругові циліндри зі спільною віссю $Oz$; при $\varphi = const$ – півплощини, обмежені віссю $Oz$; при $z = const$ – площини, паралельні $xOy$.

Назва „циліндрична система координат” пояснюється тим, що серед її координатних поверхонь є циліндричні поверхні.

Координатними лініями в циліндричній системі координат є: лініями $\rho$ – промені, що виходять з довільної точки вісі $Oz$ і паралельні площині $xOy$; лініями $\varphi$ – кола з центром на вісі $Oz$, що лежать на площинах, перпендикулярних вісі $Oz$; лініями $z$ – прямі, паралельні вісі $Oz$. Взаємна ортогональність цих ліній очевидна.

Обчислимо коефіцієнти Ляме циліндричної системи координат. Маємо:

$$\bar{r}_\rho = \frac{\partial\bar{r}}{\partial\rho} = \cos\varphi\bar{e}_1 + \sin\varphi\bar{e}_2,\ \bar{r}_\varphi = \frac{\partial\bar{r}}{\partial\varphi} = -\rho\sin\varphi\bar{e}_1 + \rho\cos\varphi\bar{e}_2,\ \bar{r}_z = \frac{\partial\bar{r}}{\partial z} = \bar{e}_3.$$

Тоді:

$$H_\rho = \left|\bar{r}_\rho\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1,$$

$$H_\varphi = \left|\bar{r}_\varphi\right| = \sqrt{\rho^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} = \rho, \qquad (21)$$

$$H_z = \left|\bar{r}_z\right| = 1.$$

Квадрат елемента довжини

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2. \qquad (22)$$

Елементи довжини координатних ліній:

$$\varphi = const,\ z = const - ds_\rho = d\rho$$

$$\varphi = const,\ \rho = const - ds_z = dz \qquad (23)$$

$$\rho = const,\ z = const - ds_\varphi = \rho d\varphi$$

Елементи площ координатних поверхонь:

$$\rho = const - d\sigma = ds_\varphi \cdot ds_z = \rho\, d\varphi\, dz$$
$$\varphi = const - d\sigma = ds_\rho \cdot ds_z = d\rho\, dz \qquad (24)$$
$$z = const - d\sigma = ds_\rho \cdot ds_\varphi = \rho\, d\rho d\varphi$$

Елемент об'єму:

$$dV = ds_\rho \cdot ds_\varphi \cdot ds_z = \rho d\rho d\varphi\, dz \qquad (25)$$

**Приклад 5.** У прямокутній декартовій системі координат *Oxyz* візьмемо точку $M(x, y, z)$ і через цю точку та вісь *Oz* проведемо площину. (рис.8.6)

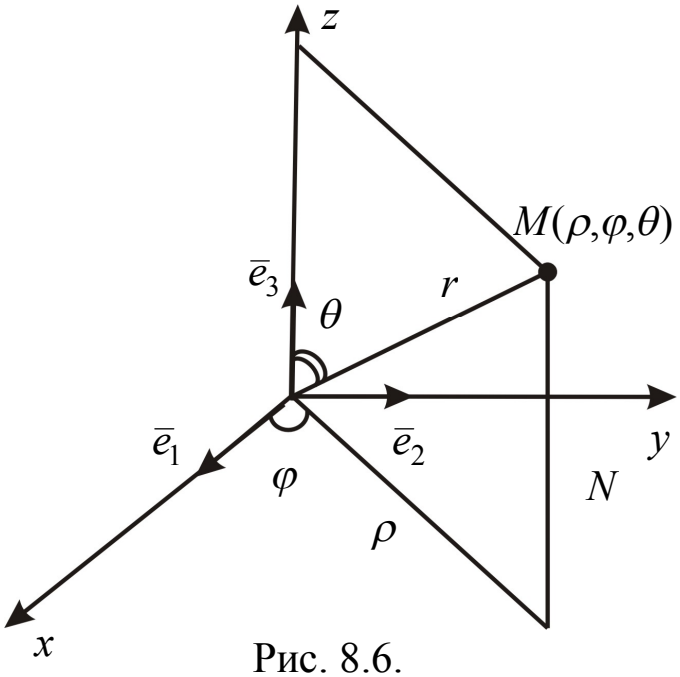


Рис. 8.6.

Нехай $r$ – відстань від початку координат до точки $M$, $\varphi$ – двогранний кут між площиною $xOz$ і площиною, що проходить через вісь *Oz* і точку $M$, $\theta$ – кут між віссю *Oz* і променем *OM*.

Упорядкована трійка чисел $(r, \varphi, \theta)$, де $r > 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta < \pi$, однозначно визначає точку $M$ у просторі. Ці числа називаються *сферичними координатами точки M.*

Знайдемо залежність між прямокутними і сферичними координатами точки *M*. З прямокутних трикутників *ONM* і *OPN* маємо:

$$z = r\cos\theta,\ \rho = r\sin\theta,\ x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$$

Тоді

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta, \qquad (26)$$

де $0 \le r < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta < \pi$.

З формул (26) маємо:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ ,\ \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ tg\varphi = \frac{y}{x}. \qquad (27)$$

Як і у випадку циліндричних координат однозначна відповідність між точками простору і трійками чисел $(r, \varphi, \theta)$ порушується лише для точок вісі *Oz*, де невизначеною буде координата $\varphi$. Тому вісь *Oz* – це особливі точки простору.

Сферичну систему координат можна задати вектор-функцією

$$\bar{r} = r\sin\theta\cos\varphi\bar{e}_1 + r\sin\theta\sin\varphi\bar{e}_2 + r\cos\theta\bar{e}_3, \qquad (28)$$

де $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Координатними поверхнями в сферичній системі координат є: при $r = const$ – сфери з центром у початку координат; при $\theta = const$ – напівконуси з твірними, що утворюють постійний кут з віссю $Oz$; при $\varphi = const$ – напівплощини, обмежені віссю $Oz$.

Координатними лініями в сферичній системі координат будуть: лініями $r$ – промені, що виходять з точки $O$; лініями $\theta$ – меридіани (напівкола) на сферах; лініями $\varphi$ – паралелі (кола) на сферах, які лежать в площинах, перпендикулярних вісі $Oz$. Взаємна ортогональність цих ліній очевидна.

Обчислюємо коефіцієнти Ляме сферичної системи координат. Маємо:

$$\bar{r}_r = \frac{\partial\bar{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\bar{e}_1 + \sin\theta\sin\varphi\bar{e}_2 + \cos\theta\bar{e}_3$$

$$\bar{r}_\varphi = \frac{\partial\bar{r}}{\partial\varphi} = r(-\sin\theta\sin\varphi\bar{e}_1 + \sin\theta\cos\varphi\bar{e}_2)$$

$$\bar{r}_\theta = \frac{\partial\bar{r}}{\partial\theta} = r(\cos\theta\cos\varphi\bar{e}_1 + \cos\theta\sin\varphi\bar{e}_2) - r\sin\theta\bar{e}_3$$

Тоді:

$$H_r = |\bar{r}_r| = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta} = 1$$

$$H_\varphi = |\bar{r}_\varphi| = r\sin\theta \qquad (29)$$

$$H_\theta = r$$

Пропонуємо самостійно одержати в сферичних координатах квадрат елемента довжини, елементи довжин координатних ліній, елементи площ координатних поверхонь та елемент об’єму.

## Задачі

**8.1.** Еліптичні координати на площині задаються вектор-функцією

$$\bar{r} = (a\,\mathrm{ch}\rho\cos\varphi)\bar{e}_1 + (a\,\mathrm{sh}\rho\sin\varphi)\bar{e}_2,$$

де $a > 0$, $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, гіперболічний косинус $\mathrm{ch}\rho = \dfrac{e^\rho + e^{-\rho}}{2}$, гіперболічний синус $\mathrm{sh}\rho = \dfrac{e^\rho - e^{-\rho}}{2}$.

Знайти вигляд координатної сітки, довести її ортогональність, знайти особливі точки, обчислити коефіцієнти Ляме, елементи довжини та площі в еліптичних координатах.

**8.2.** Дослідити параболічні координати на площині, які задані вектор-функцією

$$\bar{r}(u,v) = (u^2 - v^2)\bar{e}_1 + 2uv\bar{e}_2,$$

де $-\infty < u < \infty$, $0 \le v < \infty$ (див. задачу 8.1).

**8.3.** Дослідити еліптичні циліндричні координати, які задані вектор-функцією

$$\bar{r} = (a\,\mathrm{ch}\rho\cos\varphi)\bar{e}_1 + (a\,\mathrm{sh}\rho\sin\varphi)\bar{e}_2 + z\bar{e}_3,$$

де $a > 0$, $\rho \ge 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ (див. задачу 8.1).

**8.4.** Дослідити параболічні циліндричні координати, які задані вектор-функцією

$$\bar{r}(u,v,z) = (u^2 - v^2)\bar{e}_1 + 2uv\bar{e}_2 + z\bar{e}_3,$$

де $-\infty < u < \infty$, $0 \le v < \infty$, $-\infty < z < \infty$ (див. задачі 8.1, 8.2).

## §9. Скалярні поля. Градієнт скалярного поля. Похідна по напрямку

**9.1. Поверхні рівня.** Як було сказано в §7, скалярне поле можна задати деякою числовою функцією $\varphi(u, v, w)$ трьох аргументів. Зокрема, в декартовій системі координат $\varphi = \varphi(x, y, z)$. У подальшому вважаємо, що скалярне поле є *гладким* в області $V$ простору, де введено систему координат. Це означає, що функція має в $V$ неперервні частинні похідні по всіх своїх аргументах.

Ті точки області $V$, для яких скаляр $\varphi$ приймає одне і те ж значення $c$, утворюють поверхню $\varphi(x, y, z) = c$, яка називається *поверхнею рівня*, або *ізоповерхнею*, або *еквіпотенціальною поверхнею*. Для різних значень $c$ одержимо різні ізоповерхні. Оскільки функція $\varphi(x, y, z)$ є однозначною, то ізоповерхні не перетинаються. Родина ізоповерхонь в певному розумінні може виступати наочною характеристикою скалярного поля.

Скалярні поля бувають плоскі, циліндричні, сферичні, параболічні і т.д. Розглянемо конкретний приклад скалярного поля.

**Приклад 1.** Вказати область визначення, описати поверхні рівня поля $\varphi = \dfrac{z}{x^2 + y^2}$. Виділити поверхню рівня, що проходить через точку $M_0(1, 2, 2)$.

**Розв'язання.** Поле визначено в області $V$, яка складається з усіх точок простору, крім тих, де $x^2 + y^2 = 0$ – це точки вісі $Oz$.

Поверхні рівня визначаються рівнянням

$$\frac{z}{x^2 + y^2} = c, \; z = c(x^2 + y^2).$$

При $c = 0$, $z = 0$ – рівняння площини $xOy$. При $c > 0$ одержуємо параболоїд обертання з вершиною в точці $O$ і направлений в додатному напрямку $Oz$, а при $c < 0$ – у від'ємному напрямку вісі $Oz$.

Для точки $M_0(1, 2, 2)$ $c = \varphi(M_0) = \dfrac{2}{5}$, $z = \dfrac{2}{5}(x^2 + y^2)$.

**9.2. Градієнт скалярного поля.** Найбільш суттєвою характеристикою скалярного поля є його диференціальна характеристика – *градієнт скалярного поля.*

Як відомо, похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ є числовою характеристикою швидкості зміни функції в точці. У випадку скалярного поля, що визначається функцією $\varphi(x, y, z)$ трьох змінних $x$, $y$, $z$, які визначають змінний вектор $\bar{r} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3$ по аналогії можна чекати, що сукупність значень трьох частинних похідних $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$ в деякій точці $M$ дозволить визначити, як швидко змінюється поле $\varphi(x, y, z) = \varphi(\bar{r})$ при зміщенні з точки $M$ в будь-якому напрямку поля.

**Означення 1.** *Градієнтом скалярного поля $\varphi(x,y,z)$ в точці $M$ називається вектор*

$$grad\varphi(M) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{e}_3. \qquad (1)$$

Якщо змінні $x$, $y$, $z$ назвати відповідно $x_1$, $x_2$, $x_3$, то рівність (1) скорочено можна записати так:

$$grad\varphi(M) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\bar{e}_i. \qquad (2)$$

Таким чином, кожній точці $M$, в якій визначено скалярне поле, поставлено у відповідність вектор $grad\varphi(M)$.

З означення $grad\varphi$ випливає, що система величин $(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3})$ утворює тензор першої валентності. Згідно з загальним означенням диференціювання тензорів, маємо, що похідна тензорного поля нульової валентності (скалярного поля) є тензорним полем першої валентності, тобто $\varphi_{,i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$. Таким чином, поле $grad\varphi(M)$ є полем тензора першої валентності і воно не залежить від вибору системи координат, тобто має інваріантний характер.

Незалежне доведення інваріантності градієнта наведено нижче в теоремі 3 цього параграфу.

У криволінійній ортогональній системі координат ($u$, $v$, $w$)

$$grad\varphi(M) = \frac{1}{H_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\bar{e}_u + \frac{1}{H_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\bar{e}_v + \frac{1}{H_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\bar{e}_w, \qquad (3)$$

де $H_u$, $H_v$, $H_w$ – коефіцієнти Ляме, а $\bar{e}_u, \bar{e}_v, \bar{e}_w$ –орти ортогональної системи координат ($u$, $v$, $w$).

Якщо система координат ($u_1$, $u_2$, $u_3$), то скорочений запис такий:

$$grad\varphi(M) = \frac{1}{H_{u_i}}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\bar{e}_{u_i} \qquad (4)$$

**Теорема 1.** *Градієнт має наступні диференціальні властивості:*

*1)* $grad\,(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 grad\varphi_1 + c_2 grad\varphi_2$;

*2)* $grad\,(\varphi\psi) = \psi grad\varphi + \varphi\, grad\psi$;

*3)* $grad\,\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\psi grad\varphi - \varphi grad\psi}{\psi^2}$;

*4)* $gradF(u) = F'(u)\, gradu$;

*5)* $gradF(u,v) = \frac{\partial F}{\partial u} gradu + \frac{\partial F}{\partial v} gradv$.

***Доведення.*** При доведенні цих властивостей використовуються правила диференціювання функцій. Доведемо для прикладу властивість 2). Нехай $\varphi = \varphi(x, y, z)$, $\psi = \varphi(x, y, z)$. Тоді

$$grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{e}_3,$$

$$grad\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\bar{e}_1 + \frac{\partial\psi}{\partial y}\bar{e}_2 + \frac{\partial\psi}{\partial z}\bar{e}_3,$$

$$grad\varphi\psi = \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x}\bar{e}_1 + \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial y}\bar{e}_2 + \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial z}\bar{e}_3 = \frac{\psi\partial\varphi + \varphi\partial\psi}{\partial x}\bar{e}_1 + \frac{\psi\partial\varphi + \varphi\partial\psi}{\partial y}\bar{e}_2 +$$

$$+ \frac{\psi\partial\varphi + \varphi\partial\psi}{\partial z}\bar{e}_3 = \psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{e}_3\right) + \varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\bar{e}_1 + \frac{\partial\psi}{\partial y}\bar{e}_2 + \frac{\partial\psi}{\partial z}\bar{e}_3\right) =$$

$$= \psi grad\varphi + \varphi grad\psi .$$

Інші властивості доводяться аналогічно (доведення провести самостійно). Теорему доведено.

**Теорема 2.** *В кожній точці $M_0$ вектор $grad\varphi(M_0)$ направлений по нормалі до поверхні рівня скалярного поля $\varphi(M)$, яка проходить через цю точку.*

***Доведення.*** Нехай у декартовій системі координат $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тоді поверхня рівня $\pi$ (рис. 9.1), що проходить через точку $M_0$, має рівняння $\varphi(x,y,z)=c_0$, де $c_0=\varphi(x_0,y_0,z_0)$.

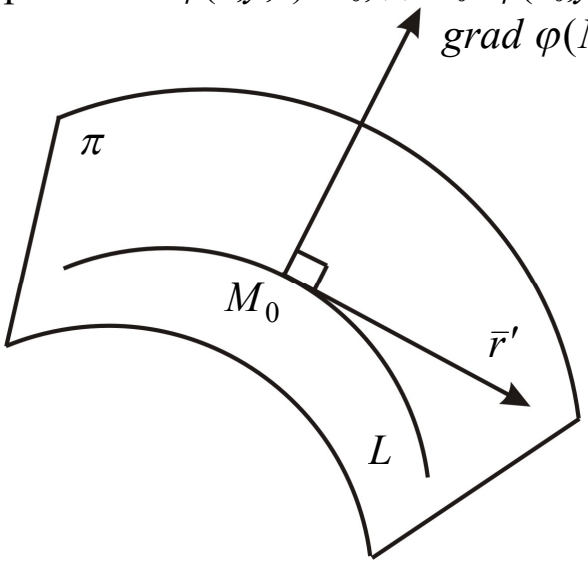



Рис.9.1.

Нехай $\bar{r}(t) = x(t)\bar{e}_1 + y(t)\bar{e}_2 + z(t)\bar{e}_3$ – довільна лінія $L$, яка лежить на поверхні $\pi$ і проходить через точку $M_0$. Її координати $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ при будь-якому значенні $t$ повинні задовольняти рівнянню поверхні $\pi$: $\varphi(x(t), y(t), z(t))=c_0$. Диференціюємо цю рівність по $t$ і одержимо:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}z'(t) = 0$$

Зліва в цій рівності стоїть скалярний добуток (в координатах) векторів $grad\varphi$ і $\bar{r}'(t)$, який є дотичним до лінії $L$. Отже, вздовж лінії $L$ $grad\varphi \cdot \bar{r}'(t) = 0$. Зокрема, в точці $M_0$ $grad\varphi(M_0) \cdot \bar{r}'(t_0) = 0$. Це означає, що $grad\varphi(M_0) \perp \bar{r}'(t_0)$. Оскільки лінія $L$ вибиралась довільно, то $grad\varphi(M_0)$ перпендикулярний будь-якій дотичній до поверхні $\pi$ в кожній точці $M_0$, тобто він має напрям нормалі до поверхні $\pi$ в точці $M_0$. Теорему доведено.

**Приклад 2.** Знайти градієнт поля $\varphi=sin(xyz+2)$ в точці $M_0(2, -3, 1)$.

**Розв'язання.** За означенням градієнта

$$grad(xyz+2) = yz\bar{e}_1 + xz\bar{e}_2 + xy\bar{e}_3 .$$

За властивістю 4) градієнта маємо:

$$grad\varphi(M) = \cos(xyz+2)(yz\bar{e}_1 + xz\bar{e}_2 + xy\bar{e}_3).$$

Зокрема, при $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$

$$grad\varphi(M_0) = \cos(-4)(-3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 6\bar{e}_3).$$

**Приклад 3.** Знайти градієнт сферичного поля $f(r)$.

**Розв'язання.** У сферичних координатах (див. приклад 4, §8) коефіцієнти Ляме $H_r = 1$, $H_\theta = r$, $H_\varphi = r\sin\theta$. Тому за формулою (3) маємо:

$$grad\ f(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}\bar{e}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial \theta}\bar{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial f}{\partial \varphi}\bar{e}_\varphi.$$

Але сферичне поле не залежить від $\theta$ і $\varphi$. Тому

$$grad\ f(r) = \frac{\partial f}{\partial r}\bar{e}_r = \frac{f'(r)}{|\bar{r}|}\cdot\bar{r},$$

де $\bar{r} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3$ – радіус-вектор точки $M(x, y, z)$.

Отже, $grad\, f(r)$ прямо пропорційний радіус-вектору $\bar{r}$ точки $M(x, y, z)$.

**9.3. Похідна по напрямку.** Розглянемо тепер, як за допомогою $grad\varphi$ можна визначити швидкість зміни поля в будь-якому напрямку. Середня швидкість зміни поля $\varphi$ при зміщенні з точки $M$ в точку $M'$ в деякому напрямку $l$, що визначається одиничним вектором (ортом) $\bar{\tau}$, характеризується відношенням

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = \frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{M'M}, \qquad (5)$$

де $\Delta l = M'M$ – величина зміщення в напрямку $l$ (рис. 9.2).

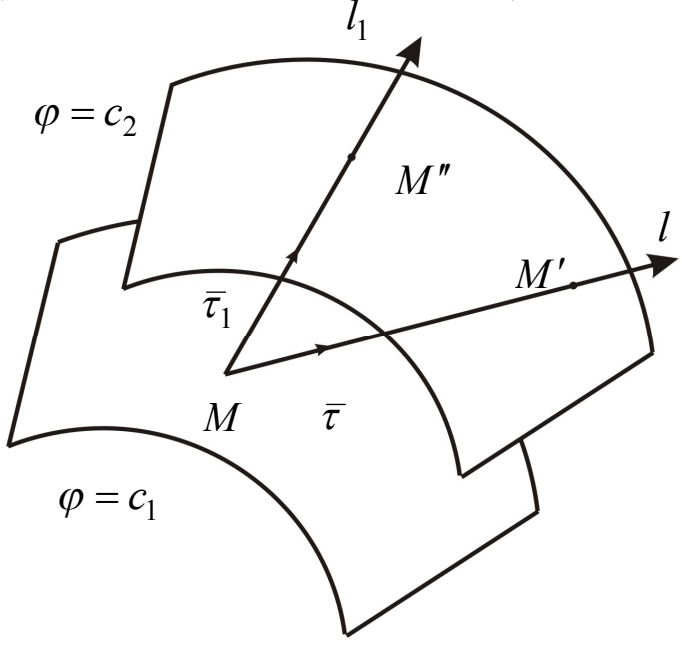



Рис. 9.2.

Зрозуміло, що це відношення буде іншим для іншого напрямку, наприклад, для напрямку $l_1$, оскільки $M''M \neq M'M$, хоча точки $M'$ і $M''$ лежать на одній поверхні рівня. Таким чином, в одному напрямку поле може змінюватись швидше ніж в іншому.

**Означення 2.** *Границя відношення* $\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$ *при* $\Delta l \to 0$*, якщо вона існує, називається похідною від* $\varphi$ *в точці* $M$ *по напрямку* $l$ *і позначається* $\frac{d\varphi}{dl}$*:*

$$\frac{d\varphi}{dl} = \lim_{M' \to M} \frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{M'M}. \qquad (6)$$

Ця похідна і є числовим значенням швидкості зміни поля $\varphi$ в точці $M$ за напрямком $l$. Якщо $\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$, то

$$\varphi(M') = \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = \varphi(x + M'M \cdot \cos(\bar{\tau}, \hat{\bar{e}}_1), y + M'M \cdot \cos(\bar{\tau}, \hat{\bar{e}}_2),$$

$$z + M'M \cdot \cos(\bar{\tau}, \hat{\bar{e}}_3)).$$

Розкладаючи $\varphi(M')$ в ряд Тейлора, одержимо

$$\varphi(M') = \varphi(M) + \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(\bar{\tau}, \hat{\bar{e}}_1) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(\bar{\tau}, \hat{\bar{e}}_2) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(\bar{\tau}, \hat{\bar{e}}_3) \right) \cdot M'M + \alpha \cdot (M'M)^2,$$

де $\alpha(M'M)^2$ – величина другого порядку малості відносно $M'M$.

Підставляючи значення $\varphi(M')$ в (6) і переходячи до границі, одержимо

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \bar{\tau}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \bar{\tau}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot \bar{\tau}_z = \bar{\tau} \cdot grad\varphi. \qquad (7)$$

Оскільки за означенням скалярного добутку

$$\bar{\tau} \cdot grad\varphi = |\tau| \cdot |grad\varphi| \cdot \cos(\bar{\tau}, \hat{grad\,\varphi}) = |grad\varphi| \cdot \cos(\bar{\tau}, \hat{grad\,\varphi}),$$

то *похідна від* $\varphi$ *по напрямку* $l$ *дорівнює проекції* $grad\varphi$ *на цей напрямок.*

Отже, коли в деякій точці скалярного поля задано його градієнт, то завжди можна знайти швидкість зміни поля вздовж будь-якого напрямку. Тому кажуть, що $grad\varphi$ є мірою неоднорідності скалярного поля $\varphi$.

**Зауваження.** Крім похідної по напрямку розглядається поняття похідної по кривій, тобто коли від точки $M$ до точки $M'$ рухаються по кривій $s$. За означенням

$$\frac{d\varphi}{ds} = \lim_{M' \to M} \frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{\Delta s}, \qquad (8)$$

де $\Delta s$ – довжина дуги $M'M$ по кривій $s$. Легко доводиться, що $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dl}$, тобто похідна поля$\varphi$ по кривій $s$ дорівнює похідній поля $\varphi$ по напрямку $l$, що визначає дотичну в точці $M$ даної кривої.

**Теорема 3.** *Градієнт $\varphi(M)$ точки $M$ скалярного поля $\varphi$ не залежить від вибору системи координат.*

***Доведення.*** За доведеним вище

$$\frac{d\varphi}{dl} = |grad\varphi|\cos\theta,$$

де $\theta$ – кут між ортом $\bar{\tau}$ напрямку $l$ і $grad\varphi(M)$. Оскільки $cos\theta \le 1$, то $\frac{d\varphi}{dl} \le |grad\varphi(M)|$, причому $\frac{d\varphi}{dl} = |grad\varphi(M)|$ лише тоді, коли $cos\theta = 1$, $\theta = 0^o$, тобто напрямок $l$ збігається з напрямком градієнта в точці $M$.

Отже, модуль градієнта дорівнює найбільшому значенню $\frac{d\varphi}{dl}$ серед усіх можливих напрямків $l$, що виходять з точки $M$, а напрямок градієнта є тим напрямком, вздовж якого похідна $\frac{d\varphi}{dl}$ максимальна. Отже, ні довжина, ні напрямок градієнта не залежать від вибору системи координат, тобто градієнт є інваріантом скалярного поля. Теорему доведено.

**Висновок.** Диференціювання скалярного поля (тензорного поля валентності нуль) приводить до векторного поля градієнта (тензорного поля валентності один).

**Приклад 4.** Знайти похідну скалярного поля $\varphi = x^3y + 5z$ в точці $M(1, 1, -1)$ по напрямку $l$, що визначається зміщенням точки $M$ у точку $A(3, -1, -2)$.

**Розв'язання.** Використаємо формулу (7). Для цього знайдемо $grad\varphi(M)$ та орт $\bar{\tau}$ напрямку $\overline{MA}$. Маємо:

$$grad\varphi(M) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{e}_3 = 3x^2y\bar{e}_1 + x^3\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3 = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 5\bar{e}_3$$

$$\overline{MA} = (3-1)\bar{e}_1 + (-1-1)\bar{e}_2 + (-2+1)\bar{e}_3 = 2\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3,$$

$$\left|\overline{MA}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3, \quad \tau = \frac{2}{3}\bar{e}_1 - \frac{2}{3}\bar{e}_2 - \frac{1}{3}\bar{e}_3,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{2}{3}\cdot 3 + \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 5 = -\frac{1}{3}.$$

**Зауваження.** Для побудови векторного поля градієнта скалярного поля над функцією $\varphi$ треба виконати ряд операцій: взяти частинні похідні, перемножити їх на відповідні орти, одержані добутки додати – це і буде $grad\varphi$. Сукупність цих операцій в математиці позначають одним символом $\nabla$, який називається *оператором набла*, або *оператором Гамільтона* ((1805–1865) – ірландський математик). В прямокутних декартових координатах $\nabla$ має вигляд

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\bar{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\bar{e}_3. \qquad (8)$$

Застосовуючи оператор $\nabla$ до скаляра $\varphi$ одержуємо векторне поле $grad\varphi$, тобто в декартових координатах

$$\nabla\varphi = grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{e}_3. \qquad (9)$$

## Задачі

**9.1.** Скалярне поле $f(M)$ називається *сферичним*, якщо в кожній точці $M$ його значення залежить лише від відстані $OM$, де $O$ – деяка фіксована точка. Визначити поверхні рівня сферичного скалярного поля та записати його в декартових координатах.

**9.2.** Знайти область визначення та поверхні рівня скалярних полів:

1) $\varphi = xy$;
2) $\varphi = \sqrt{9 - x^2 - 3y^2}$;
3) $\varphi = x^2 + y^2 - 4z^2$;
4) $\varphi = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$.

**9.3.** Знайти градієнт поля $\varphi = \cos(xy + yz + 2)$ в точці $M(1, -1, 3)$.

**9.4.** Знайти градієнт циліндричного поля $f(\rho)$.

**9.5.** Знайти градієнт скалярних полів:

1) $\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z + 5$;
2) $\varphi = arctg\dfrac{y}{x}$;
3) $\varphi = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

**9.6.** Знайти похідну скалярного поля $\varphi = x^3y - xy^3 + 5z$ в точці $M(1, -1, 1)$ за напрямком $l$, що визначається зміщенням з точки $M$ у точку $A(-1, 2, -1)$.

**9.7.** За яким напрямком в точці $M(-3, -1, 2)$ скалярне поле $\varphi = xy + xz + yz$ змінюється найшвидше? Яка максимальна швидкість цієї зміни?

**9.8.** Знайти похідну циліндричного поля $f(\rho) = (x^2 + y^2)^2$ в точці $M_0(1, -2, 0)$ по напрямку радіуса-вектора цієї точки.

**9.9.** Знайти похідну скалярного поля $\varphi = (x^2 + y^2)z$ вздовж гвинтової лінії $\bar{r}(t) = \cos t\bar{e}_1 + \sin t\bar{e}_2 + t\bar{e}_3$ в точці $M_0$, що відповідає параметру $t_0 = \pi$.

**9.10.** Знайти похідну поля $\varphi(M) = xz^2 + 2yz$ в точці $M(1, 0, 2)$ вздовж кола

$$\bar{r}(t) = (\cos t + 1)\bar{e}_1 + (\sin t - 1)\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 .$$

## §10. Векторні поля та їх диференціальні характеристики

Якщо кожній точці $M$ деякої області $V$ простору $E_3$, поставлено у відповідність цілком визначений вектор $\bar{a}(M)$, то кажуть, що в області $V$ задано *векторне поле*.

**10.1. Векторні лінії.** Геометричною характеристикою векторного поля є *векторні лінії*. Векторною лінією векторного поля називається крива, в кожній точці якої дотична має напрям вектора в цій точці. Вкажемо деякі приклади.

**Приклад 1.** Векторні лінії поля $grad\varphi$ – це криві, ортогональні в кожній точці до поверхні рівня $\varphi = const$.

**Приклад 2.** Векторні лінії поля швидкостей обертання твердого тіла – це концентричні кола з центром на вісі обертання, а векторні лінії поля швидкостей твердого тіла, що рухається поступально і прямолінійно – це прямі лінії.

**Приклад 3.** Векторні лінії поля швидкостей рухомої рідини (лінії течії) мають різний вигляд в різні моменти часу (залежать від часу). У випадку стаціонарного поля (рух рідини встановився, стабілізувався) векторні лінії не змінюються і представляють собою траєкторії частин рідини.

Нехай в області $V$ задано векторне поле $\bar{a}(M)$ і деякий замкнений контур $C$. Провівши через його точки векторні лінії, одержимо поверхню, що називається *векторною трубкою* (рис. 10.1).

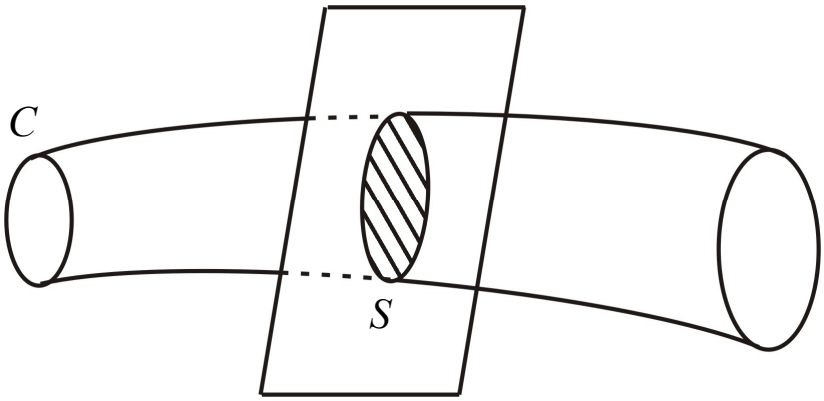



Рис. 10.1.

*Перерізом S векторної трубки* називають частину січної поверхні, що лежить всередині векторної трубки.

Якщо в області $V$ задано ортогональну криволінійну систему координат ($u$, $v$, $w$), то векторне поле $\bar{a}(M)$ визначається трьома функціями $a_u$, $a_v$, $a_w$, які визначені в області $V$:

$$\bar{a}(M) = a_u(u,v,w)\bar{e}_u + a_v(u,v,w)\bar{e}_v + a_w(u,v,w)\bar{e}_w. \qquad (1)$$

При цьому векторне поле називається *неперервно диференційовним*, якщо функції $a_u$, $a_v$, $a_w$ мають неперервні частинні похідні по $u$, $v$ і $w$ в області $V$.

Зокрема, в декартовій системі координат векторне поле (після введення відповідних позначень) можна задати так:

$$\bar{a}(M) = P(x,y,z)\bar{e}_1 + Q(x,y,z)\bar{e}_2 + R(x,y,z)\bar{e}_3. \qquad (2)$$

Векторне поле $\bar{a}(M)$ називається *плоским*, якщо всі вектори поля паралельні деякій заданій площині $\pi$ та рівні вздовж кожного перпендикуляра до цієї площини. Наприклад, якщо площиною $\pi$ є площина $xOy$, то таке плоске поле задається рівністю

$$\bar{a}(M) = \bar{a}(x,y) = P(x,y)\bar{e}_1 + Q(x,y)\bar{e}_2. \qquad (3)$$

Якщо задано векторне поле $\bar{a}(M)$, то за означенням векторної лінії елемент її дотичної $d\bar{r}$ в даній точці колінеарний з вектором $\bar{a}$, тобто $d\bar{r} \times \bar{a} = 0$. Це векторна форма диференціального рівняння векторних ліній. Оскільки колінеарні вектори пропорційні, то пропорційні і їх координати. Тому в координатній формі родина векторних ліній визначається системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}. \qquad (4)$$

У випадку плоского поля векторні лінії задовольняють рівнянням (при відповідному виборі системи координат)

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)},\ dz = 0. \qquad (5)$$

Векторні поля $\bar{a}(M)$ і $\bar{b}(M) = F(M)\bar{a}(M)$, де $F(M)$ – скалярна функція, називаються *колінеарними полями*. Колінеарні векторні поля мають однакові векторні лінії.

Векторні лінії в криволінійних ортогональних координатах ($u$, $v$, $w$) визначаються системою диференціальних рівнянь

$$\frac{H_u du}{a_u(u,v,w)} = \frac{H_v dv}{a_v(u,v,w)} = \frac{H_w dw}{a_w(u,v,w)}, \qquad (6)$$

де $H_u$, $H_v$, $H_w$ – коефіцієнти Ляме.

Зокрема, в циліндричній системі координат диференціальні рівняння векторних ліній мають вигляд

$$\frac{d\rho}{a_\rho(\rho,\varphi,z)} = \frac{\rho d\varphi}{a_\varphi(\rho,\varphi,z)} = \frac{dz}{a_z(\rho,\varphi,z)}. \qquad (7)$$

У сферичній системі координат диференціальні рівняння векторних ліній мають вигляд

$$\frac{dr}{a_r(r,\theta,\varphi)} = \frac{r d\theta}{a_\theta(r,\theta,\varphi)} = \frac{r\sin\theta\, d\varphi}{a_\varphi(r,\theta,\varphi)}. \qquad (8)$$

**Приклад 4.** Знайти векторні лінії поля $\bar{a}(M) = \frac{1}{x}\bar{e}_1 + \frac{1}{2y}\bar{e}_2$.

**Розв'язання.** Задане поле є плоским і визначено для всіх точок простору, де $x \neq 0$, $y \neq 0$ (тобто, крім точок вісі $Oz$). За умовою $P(x,y) = \frac{1}{x}$, $Q(x,y) = \frac{1}{2y}$. Тому за формулами (5) маємо:

$$x dx = 2y dy,\ dz = 0.$$

Звідси $\frac{x^2}{2} = y^2 + c$, $z = h$, або $\frac{x^2}{2} - y^2 = c$, $z = h$. При $c \neq 0$ лінії є гіперболами, розташованими в площині $z = h$. При $c = 0$ одержуємо дві прямі $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}x$ з „виколотою" точкою (0, 0).

**Приклад 5.** Векторне поле $\bar{a}(M)$ називається *центральносиметричним*, якщо воно залежить лише від радіуса-вектора $\bar{r}$ точки $M$, тобто $\bar{a} = f(|\bar{r}|)\bar{r} = |\bar{r}| \cdot f(|\bar{r}|)\bar{e}_r$. Знайти векторні лінії такого поля.

**Розв'язання.** Векторні лінії будемо характеризувати в сферичній системі координат. В ній центральносиметричне поле $\bar{a}(M)$ має координати $a_r = |\bar{r}| \cdot f(|\bar{r}|)$, $a_\theta = 0$, $a_\varphi = 0$. Тому за формулами (8) одержуємо $\theta = const$, $\varphi = const$. Цій умові задовольняють промені, що виходять з центра $O$, вздовж яких змінюється лише радіус-вектор.

**10.2. Дивергенція векторного поля.** Дивергенція (divergentia (лат.) – розбіжність) векторного поля $\bar{a}(M)$ є скалярною функцією точки $M$ і тому утворює скалярне поле, побудоване за даним векторним полем. Дивергенція поля $\bar{a}(M)$ позначається $\operatorname{div} \bar{a}(M)$ і є основною диференціальною характеристикою векторного поля $\bar{a}(M)$.

Геометрично дивергенція є границею відношення потоку векторного поля через замкнену поверхню, яка оточує дану точку, до об'єму, який ця поверхня обмежує, коли ця поверхня стягується в точку.

Дивергенція векторного поля $\bar{a}(M)$ існує в точці $M$, якщо компоненти поля неперервні разом з частинними похідними по координатах.

Дивергенцію можна обчислити в декартових і криволінійних ортогональних координатах.

В декартовій системі координат

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \qquad (9)$$

де $P$, $Q$, $R$ – проекції поля на вісі $Ox$, $Oy$, $Oz$.

В будь-якій ортогональній криволінійній системі координат

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left(\frac{\partial(a_u H_v H_w)}{\partial u} + \frac{\partial(a_v H_u H_w)}{\partial v} + \frac{\partial(a_w H_u H_v)}{\partial w}\right). \qquad (10)$$

Зокрема, в циліндричній і сферичній системах координат відповідно

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{a_\rho}{\rho} + \frac{\partial a_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \qquad (11)$$

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{2a_r}{r} + \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{a_\theta ctg\theta}{r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}. \qquad (12)$$

Дивергенція не залежить від вибору системи координат і тому є інваріантною характеристикою векторного поля. Цей факт можна довести з використанням поняття потоку векторного поля або теорії

диференціювання тензорів. Якщо векторне поле, яке є тензорним полем першої валентності $a_i = a_i(x_1, x_2, x_3)$ продиференціювати, то одержимо тензорне поле другої валентності

$$a_{i,k} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k}.$$

Тензор другої валентності характеризується матрицею $A$ в деякому базисі. При згортанні цього тензора одержимо тензор нульової валентності $a_{i,i}$. Це константа, що дорівнює сумі діагональних елементів матриці $A$. А ця сума, в свою чергу, називається *слідом матриці* $A$. В лінійній алгебрі доведено, що слід не залежить від вибору координат. Цей інваріант поля $a_{i,k}$ і є дивергенцією поля $\bar{a}(M)$, бо

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

і $trA = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} \bar{a}$.

Дивергенція має наступні диференціальні властивості:

1) $\operatorname{div}(c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2) = c_1 \operatorname{div} \bar{a}_1 + c_2 \operatorname{div} \bar{a}_2$;

2) $\operatorname{div}(\varphi\bar{a}) = \varphi \operatorname{div} \bar{a} + \bar{a} \cdot grad\, \varphi$;

3) *якщо* $\bar{a} = const$, *то* $\operatorname{div} \bar{a} = 0$ *і* $\operatorname{div}(\varphi\bar{a}) = \bar{a} \cdot grad\, \varphi$.

Векторне поле $\bar{a}(M)$, для якого в області $V$ $\operatorname{div} \bar{a}(M) = 0$, називається *соленоїдним* в цій області.

Доведемо, наприклад, властивість 2). Нехай $\varphi = \varphi(x, y, z)$ – скалярне поле, $\bar{a} = P(x,y,z)\bar{e}_1 + Q(x,y,z)\bar{e}_2 + R(x,y,z)\bar{e}_3$ – векторне поле.Тоді

$$\operatorname{div}(\varphi\bar{a}) = \operatorname{div}(\varphi(x,y,z)P(x,y,z)\bar{e}_1 + \varphi(x,y,z)Q(x,y,z)\bar{e}_2 +$$

$$+ \varphi(x,y,z)R(x,y,z)\bar{e}_3) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi(x,y,z)P(x,y,z)) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi(x,y,z)Q(x,y,z)) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(\varphi(x,y,z)R(x,y,z)) = P\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi\frac{\partial Q}{\partial y} + R\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \varphi\frac{\partial R}{\partial z} =$$

$$= \varphi\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)+\left(P\frac{\partial \varphi}{\partial x}+Q\frac{\partial \varphi}{\partial y}+R\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)=\varphi \operatorname{div}\bar{a}+\bar{a}\cdot grad\varphi.$$

Властивість 2) доведено. Властивість 3) є прямим наслідком властивості 2), а властивість 1) очевидна. Звертаємо увагу, що запис $\bar{a}\cdot grad\varphi$ є скалярний добуток двох векторів $\bar{a}$ та $grad\ \varphi$.

**Приклад 6.** Знайти дивергенцію центральносиметричного поля $\bar{a}=f(r)\cdot\bar{r}$. Якою буде $\operatorname{div}\bar{a}$ при $f(r) = 1$? При якій умові поле буде соленоїдним?

**Розв'язання.** За властивістю 2)

$$\operatorname{div}\bar{a}=div(f(r)\cdot\bar{r})=f(r)\cdot div\bar{r}+\bar{r}\cdot grad(f(r))$$

За прикладом 3 з §9 маємо $grad(f(r))=\frac{f'(r)}{r}\cdot\bar{r}$. У сферичних координатах $a_r=|r|f(r)$, $a_\theta=a_\varphi=0$ і за формулою (2) $\operatorname{div}\bar{r}=2\cdot\frac{r}{r}+1=3$. Отже, коли $\bar{a}=\bar{r}$, то $\operatorname{div}\bar{a}=3$. Підставляючи одержані значення, одержимо

$$\operatorname{div}\bar{a}=3f(r)+f'(r).$$

За означенням поле буде соленоїдним, коли

$$3f(r)+f'(r)=0.$$

Розв'язком цього диференціального рівняння є функція $f(r)=\frac{q}{r^3}$, де $q=const$. Тоді $a=\frac{q}{r^3}\bar{r}=\frac{q}{r^2}\bar{e}_r$ – кулонове поле.

**10.3. Ротор векторного поля.** Нехай задано векторне поле $\bar{a}(M)$ в декартових координатах

$$\bar{a}(M)=P(x,y,z)\bar{e}_1+Q(x,y,z)\bar{e}_2+R(x,y,z)\bar{e}_3.$$

Поряд з дивергенцією $\operatorname{div}\bar{a}(M)$ поля $\bar{a}(M)$ є інша диференціальна характеристика цього поля – *ротор вектора* $\bar{a}$ (по іншому – *вихор вектора* $\bar{a}$). Термін „ротор" походить від латинського „rotate" – обертати.

Ротором векторного поля $\bar{a}(M)$ називається векторне поле

$$(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\bar{e}_1+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\bar{e}_2+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\bar{e}_3=rot\bar{a}. \qquad (13)$$

Вектор $rot\,\bar{a}$ можна записати у вигляді символічного визначника третього порядку

$$rot\,\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \qquad (14)$$

при розкритті якого „добуток" оператора з другого рядка визначника на елемент третього рядка означає відповідну частинну похідну, наприклад, $\dfrac{\partial}{\partial x} \cdot Q = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Аналогічний запис $rot\,\bar{a}$ в криволінійних ортогональних координатах ($u$, $v$, $w$) має вигляд

$$rot\,\bar{a} = \frac{1}{H_u H_v H_w} \begin{vmatrix} H_u\bar{e}_u & H_v\bar{e}_v & H_w\bar{e}_w \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ H_u a_u & H_v a_v & H_w a_w \end{vmatrix}, \qquad (15)$$

де $H_u$, $H_v$, $H_w$ – коефіцієнти Ляме.

Ротор векторного поля не залежить від вибору системи координат і тому є (разом з дивергенцією) інваріантною характеристикою векторного поля. Цей факт встановлюється з використанням циркуляції векторного поля або з використанням теорії диференціювання тензорів.

Справді, вектор $\bar{z} = rot\,\bar{a}$ є результатом згортання тензора $a_{i,j}$ з дискримінантним тензором $-\varepsilon_{ijk}$, якщо покласти $\bar{z} = -\varepsilon_{ijk} a_{j,k}$. Звідси випливає його інваріантність.

Ротор векторного поля має наступні диференціальні властивості:

1) $rot\,(c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2) = c_1 rot\,\bar{a}_1 + c_2 rot\,\bar{a}_2$;

2) $rot\,(\varphi\bar{a}) = grad\varphi \times \bar{a} + \varphi \cdot rot\,\bar{a}$;

3) *якщо* $\bar{a} = const$, *то* $rot\,\bar{a} = \bar{0}$ *і* $rot\,(\varphi\bar{a}) = grad\varphi \times \bar{a}$.

Якщо в області $V$ $rot\,\bar{a}(M) = \bar{0}$, то поле $\bar{a}(M)$ називається *безвихровим*.

Доведемо властивість 2). Нехай

$\varphi = \varphi(x, y, z)$, $\bar{a} = P(x, y, z)\bar{e}_1 + Q(x, y, z)\bar{e}_2 + R(x, y, z)\bar{e}_3$.

Тоді за означеннями ротора векторного поля, градієнта скалярного поля і векторного добутку векторів маємо:

$\bar{a} = P(x, y, z)\bar{e}_1 + Q(x, y, z)\bar{e}_2 + R(x, y, z)\bar{e}_3$

$$rot\,(\varphi\bar{a}) = rot(\varphi P\bar{e}_1 + \varphi Q\bar{e}_2 + \varphi\,\mathrm{R}\bar{\mathrm{e}}_3) =$$

$$= \left(\frac{\partial(\varphi R)}{\partial y} - \frac{\partial(\varphi Q)}{\partial z}\right)\bar{e}_1 + \left(\frac{\partial(\varphi P)}{\partial z} - \frac{\partial(\varphi R)}{\partial x}\right)\bar{e}_2 + \left(\frac{\partial(\varphi Q)}{\partial x} - \frac{\partial(\varphi P)}{\partial y}\right)\bar{e}_3 =$$

$$= \left(\frac{R\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\varphi\partial R}{\partial y} - \frac{Q\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\varphi\partial Q}{\partial z}\right)\bar{e}_1 + \left(\frac{P\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\varphi\partial P}{\partial z} - \frac{R\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\varphi\partial R}{\partial x}\right)\bar{e}_2 +$$

$$+ \left(\frac{Q\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\varphi\partial Q}{\partial x} - \frac{P\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\varphi\partial P}{\partial y}\right)\bar{e}_3 = \left(\frac{R\partial\varphi}{\partial y} - \frac{Q\partial\varphi}{\partial z}\right)\bar{e}_1 + \left(\frac{P\partial\varphi}{\partial z} - \frac{R\partial\varphi}{\partial x}\right)\bar{e}_2 +$$

$$+ \left(\frac{Q\partial\varphi}{\partial x} - \frac{P\partial\varphi}{\partial y}\right)\bar{e}_3 + \varphi\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{e}_1 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\bar{e}_2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{e}_3\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} + \varphi rot\,\bar{a} = grad\,\varphi \times \bar{a} + \varphi rot\,\bar{a}$$

Властивість 2) доведено. Властивість 3) є прямим наслідком властивості 2), а властивість 1) очевидна.

**Приклад 7.** Знайти ротор поля лінійних швидкостей точок твердого тіла, яке рухається навколо фіксованої точки $O$. Довести, що це поле соленоїдне.

**Розв'язання.** Як відомо з фізики, в кожний фіксований момент часу векторне поле лінійних швидкостей

$$\bar{v}(M) = \bar{\omega} \times \bar{r}\,,$$

де $\bar{\omega}$ – вектор миттєвої кутової швидкості, $\bar{r} = \overline{OM}$ – радіус-вектор точки $M$. Виберемо декартову систему координат так, щоб вектор $\bar{\omega}$ лежав на вісі $Oz$. Тоді $\bar{\omega} = \omega \cdot \bar{e}_3$ (тут $\omega$ – величина кутової швидкості), $\bar{r} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3$. За властивостями векторного добутку

$$\bar{v}(M) = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\bar{e}_1 + \omega x\bar{e}_2\,.$$

Звідси за означенням $\operatorname{div}\bar{v}(M) = \dfrac{\partial}{\partial x}(-\omega y) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\omega x) = 0$ і поле $\bar{v}(M)$ соленоїдне.

Знайдемо тепер $rot\,\bar{v}(M)$. За формулою (14)

$$rot\,\bar{v}(M)=\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix}=0\cdot\bar{e}_1+0\cdot\bar{e}_2+2\omega\bar{e}_3=2\omega\bar{e}_3=2\bar{\omega}\,.$$

Отже, ротор поля лінійних швидкостей точок твердого тіла, яке рухається навколо фіксованої точки, дорівнює подвоєній миттєвій кутовій швидкості.

**10.4. Оператор набла. Диференціальні операції другого порядку.** Операції взяття градієнта скалярного поля, дивергенції і ротора векторного поля записуються одноманітно за допомогою оператора набла (оператора Гамільтона):

$$\nabla=\bar{e}_1\frac{\partial}{\partial x}+\bar{e}_2\frac{\partial}{\partial y}+\bar{e}_3\frac{\partial}{\partial z}, \qquad (16)$$

а саме:

$$\nabla\varphi=grad\varphi\,,\ \nabla\cdot\bar{a}=div\,\bar{a}\,,\ \nabla\times\bar{a}=rot\,\bar{a}\,. \qquad (17)$$

Оператор набла є лінійним диференціальним оператором, тобто його застосування задовольняє умовам лінійності операторів і правилу диференціювання добутку:

1) $\nabla(A+B)=\nabla A+\nabla B$;

2) $\nabla(cA)=c(\nabla A)$;

3) $\nabla(AB)=B(\nabla A)+A(\nabla B)$.

Крім цього, оператор набла є векторним оператором, тобто до нього в багатьох випадках можна застосувати формули векторної алгебри. Проте, не кожне векторне співвідношення залишається правильним при заміні того чи іншого вектора оператором $\nabla$. Наприклад, рівність $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{a})=0$ стане неправильною при заміні $\bar{b}$ на $\nabla$. Тому формульне оперування з $\nabla$ як з вектором кожного разу потребує обґрунтування або перевірки. Крім цього, треба керуватись рядом загальних правил, при дотриманні яких формальне застосування оператора $\nabla$ приводить до правильних результатів. Наведемо деякі з цих правил:

1) оператором $\nabla$ треба діяти по правилу диференціювання добутку;

2) за правилами векторної алгебри перетворювати кожний одержаний доданок так, щоб на останньому місці стояв той множник, на який діє оператор $\nabla$, а $\nabla$ стояв перед ним;

3) при застосуванні оператора $\nabla$ декілька разів треба вважати, що $\nabla \times \nabla = \bar{0}$;

4) скалярний квадрат оператора набла

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

називається *оператором Лапласа* або *лапласіаном* і позначається $\Delta$ (Лаплас П.С. (1749–1827) – французький математик і фізик). Таким чином, $\nabla^2 = \Delta$.

Якщо $\varphi$ – скалярне поле, то

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \qquad (18)$$

Якщо $\bar{a} = P\bar{e}_1 + Q\bar{e}_2 + \mathrm{R}\bar{e}_3$ – векторне поле, то

$$\Delta\bar{a} = \Delta P\bar{e}_1 + \Delta Q\bar{e}_2 + \Delta\,\mathrm{R}\bar{e}_3. \qquad (19)$$

Всього є 5 диференціальних операцій другого порядку зі скалярними і векторними полями, які передбачаються двічі неперервно диференційовними:

$$\begin{aligned}
&1.\ \mathrm{div}\ grad\varphi = \Delta\varphi \\
&2.\ rot\ grad\varphi = \bar{0} \\
&3.\ grad\ \mathrm{div}\ \bar{a} = \nabla(\nabla\bar{a}) \qquad (20) \\
&4.\ \mathrm{div}\ rot\ \bar{a} = 0 \\
&5.\ rot\ rot\ \bar{a} = grad\ \mathrm{div}\ \bar{a} - \Delta\bar{a}
\end{aligned}$$

Рівність 2 показує, що векторне поле $grad\varphi$ є безвихровим, а рівність 4 показує, що векторне поле $rot\ \bar{a}$ є соленоїдним.

Доведемо рівності 1-5. За формулами (17) та за рівностями $\nabla \times \nabla = \bar{0}$, $\nabla^2 = \Delta$ маємо:

1) $\mathrm{div}\ grad\varphi = \mathrm{div}\,(\nabla\varphi) = \nabla(\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi$.

2) $rot\ grad\varphi = \nabla \times \nabla\varphi = (\nabla \times \nabla)\varphi = \bar{0}\varphi = \bar{0}$.

3) $grad\ \mathrm{div}\ \bar{a} = grad(\nabla\bar{a}) = \nabla(\nabla\bar{a})$.

4) $\mathrm{div}\ rot\ \bar{a} = \mathrm{div}\,(\nabla \times \bar{a}) = \nabla(\nabla \times \bar{a}) = (\nabla \times \nabla)\bar{a} = \bar{0} \cdot \bar{a} = 0$.

Тут використано властивість мішаного добутку векторів: $\bar{a}(\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}$.

5) $rot\ rot\ \bar{a} = rot(\nabla \times \bar{a}) = \nabla \times (\nabla \times \bar{a}) = \nabla(\nabla\bar{a}) - \nabla^2\bar{a} =$

$= grad\ \mathrm{div}\ \bar{a} - \Delta\bar{a}$.

Тут використано властивість векторного добутку векторів:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - (\bar{a}\bar{b})\bar{c}.$$

**Приклад 8.** Записати дію оператора Лапласа на скалярне поле в ортогональних криволінійних координатах.

**Розв'язання.** Оскільки $\Delta\varphi$ = div *grad*$\varphi$, то для запису $\Delta\varphi$ в ортогональних криволінійних координатах треба до формули

$$grad\ \varphi(M) = \frac{1}{H_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\bar{e}_u + \frac{1}{H_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\bar{e}_v + \frac{1}{H_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\bar{e}_w,$$

яка виражає *grad*$\varphi$ в координатах ($u$, $v$, $w$), застосувати операцію взяття дивергенції в тих же координатах (див. формулу 10). В результаті одержимо

$$\Delta\varphi = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_v H_w}{H_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_u H_w}{H_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H_u H_v}{H_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\right]. \quad (21)$$

Зокрема, в циліндричних і сферичних координатах маємо відповідно:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \quad (22)$$

$$\Delta\Phi = \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{ctg\theta}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}. \quad (23)$$

## Задачі

**10.1.** Знайти векторні лінії поля $\bar{a}(M) = \frac{x}{y}\bar{e}_1 + \frac{y}{x}\bar{e}_2$.

**10.2.** Векторне поле задано в циліндричних координатах: $\bar{a}(M) = \bar{e}_\rho + \varphi\bar{e}_\varphi$. Знайти його векторні лінії.

**10.3.** Знайти векторні лінії поля $\bar{a}(M)$, заданого в сферичних координатах: $\bar{a}(M) = r\sin\theta\bar{e}_r - r\cos\theta\bar{e}_\theta$.

**10.4.** Знайти силові лінії поля тяжіння

$$\bar{F}(M) = -\frac{m}{r^2}\bar{e}_r = -\frac{m}{r^3}\bar{r},\ \text{де}\ \bar{e}_r = \frac{\bar{r}}{r},$$

що утворюється масою $m$, розміщеною в точці $O$ (див. приклад 5).

**10.5.** Довести соленоїдність поля лінійних швидкостей точок твердого тіла, яке рухається навколо фіксованої точки $O$.

Вказівка: використати рівність $\bar{v}(M) = \bar{\omega}\times\bar{r}$, де $\bar{\omega}$ – вектор миттєвої швидкості, $\bar{r} = \overline{OM}$ – радіус-вектор точки $M$ та вибрати

декартову систему координат так, щоб вісь *Oz* мала напрямок вектора $\bar{\omega}$.

**10.6.** Знайти дивергенцію векторного поля:

1) $\bar{a} = xy\bar{e}_1 + yz\bar{e}_2 + xz\bar{e}_3$;

2) $\bar{a} = \rho\bar{e}_\rho + \varphi\bar{e}_\varphi + z\bar{e}_z$;

3) $\bar{a} = \sin\theta\bar{e}_r + \cos\theta\bar{e}_\theta + \sin\theta\bar{e}_\varphi$;

4) $\bar{a} = r^2\bar{c}$, де $\bar{c}$ – постійний вектор;

5) $\bar{a} = f(\rho)\bar{e}_\rho$. Коли це поле буде соленоїдним?

**10.7.** Записати формули для ротора векторного поля в циліндричних і сферичних координатах.

**10.8.** Довести, що кожне центрально-симетричне поле $\bar{a} = f(r)\bar{r} = rf(r)\bar{e}_r$ є безвихровим.

**10.9.** Знайти ротор векторного поля:

1) $\bar{a} = xyz(x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3)$;

2) $\bar{a} = xy\bar{e}_1 - yz\bar{e}_2 + yz\bar{e}_3$;

3) $\bar{a} = y^2\bar{e}_1 - x^2\bar{e}_2 + z^2\bar{e}_3$.

**10.10.** Довести, що $\operatorname{div}(\bar{a}\times\bar{b}) = \bar{b}\,rot\,\bar{a} - \bar{a}\,rot\,\bar{b}$.

**10.11.** Знайти $rot\,(\bar{a}\times\bar{c})$, якщо $\bar{a} = x^2\bar{e}_1 + y^2\bar{e}_2 - x^2\bar{e}_3$, $\bar{c} = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$.

**10.12.** Довести, що векторне поле $\bar{a} = f(\rho)(x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2)$, де $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, є безвихровим при будь-якому виборі $f(\rho)$.

**10.13.** Використовуючи правила дії оператора $\nabla$, довести рівності:

1) $grad\,(\varphi\psi) = \varphi\,grad\psi + \psi\,grad\varphi$;

2) $\operatorname{div}(\varphi\bar{a}) = \varphi\operatorname{div}\bar{a} + \bar{a}\,grad\,\varphi$;

3) $rot\,(\varphi\bar{a}) = \varphi\,rot\,\bar{a} + (\bar{a}\times grad\,\varphi)$;

4) $grad\,\bar{a}\cdot\bar{b} = (\bar{a}\nabla)\bar{b} + (\bar{b}\nabla)\bar{a} + (\bar{a}\times rot\,\bar{b}) + (\bar{b}\times rot\,\bar{a})$;

5) $rot(\bar{a}\times\bar{b}) = (\bar{b}\nabla)\bar{a} - (\bar{a}\nabla)\bar{b} + \bar{a}\operatorname{div}\bar{b} + \bar{b}\operatorname{div}\bar{a}$.

## §11. Інтегральні теореми векторного аналізу

Нехай задано деяку кусково-гладку поверхню. Це означає, що вона склеєна зі скінченного числа обмежених кусків, на кожному з яких (включаючи межу куска) вона має дотичну площину, яка

неперервно змінюється при переході від однієї точки поверхні до іншої. У цьому випадку при відповідному виборі системи координат кожний з кусків можна задати рівнянням $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$ – функція, яка визначена в деякій області $D$ на площині $xOy$ та має неперервні частинні похідні першого порядку.

Крім того, вважаємо, що поверхня двостороння. Поверхня $\sigma$ називається *двосторонньою* або *орієнтованою*, якщо при неперервному переносі вектора $\overline{n}$ одиничної нормалі по будь-якому замкненому контуру на поверхні повернення у вихідну точку $M$ відбувається з тим же напрямком вектора $\overline{n}(M)$. Зокрема, кожна поверхня, що задана рівнянням $z = f(x, y)$ має верхню і нижню сторони. Прикладом односторонньої поверхні є лист Мебіуса – прямокутний лист $ABCD$, перекручений один раз і склеєний по лініях $AB$, $CD$ (Мебіус А.Ф. (1790–1868) – німецький математик). Звертаємо увагу на те, що вектор $\overline{n}(M)$ змінюється неперервно при переході від точки $M$ до іншої точки поверхні.

Якщо поверхня обмежує деяке просторове тіло, то вектор $\overline{n}$ вважаємо спрямованим по зовнішній нормалі, в іншому випадку $\overline{n}$ вибираємо одним із двох способів.

Якщо поверхня $\sigma$ знаходиться в області $V$ простору, де є векторне поле $\overline{a}(M)$, то для цієї поверхні можна визначити важливе поняття потоку векторного поля.

**11.1. Потік векторного поля.** *Потоком p векторного поля* $\overline{a}(M)$ через двосторонню поверхню $\sigma$ називається поверхневий інтеграл

$$p = \iint_{\sigma} \overline{a}(M)\overline{n}(M)d\sigma, \qquad (1)$$

де векторне поле $\overline{a}(M)$ беруть в точках поверхні $\sigma$, а $\overline{n}(M)$ – одиничний вектор нормалі в точках поверхні $\sigma$, який вказує вибрану сторону цієї поверхні.

Оскільки $\overline{n}(M)$ – одиничний вектор, то скалярний добуток $\overline{a}(M)\,\overline{n}(M)$ є проекцією вектора $\overline{a}(M)$ на нормаль до цієї поверхні. Подвійний інтеграл по поверхні $\sigma$ треба розуміти як суму відповідних інтегралів по гладких кусках цієї поверхні.

Проілюструємо поняття потоку векторного поля на конкретному прикладі.

Нехай $\bar{a}(M)$ – векторне поле швидкостей стаціонарного руху рідини. Тоді потік $p$ визначає об'єм рідини, яка протікає за одиницю часу через поверхню (з від'ємної сторони на додатну). Якщо рідина стислива, то об'єм кожної „порції" (краплі) оцінюємо в момент її протікання через поверхню $\sigma$.

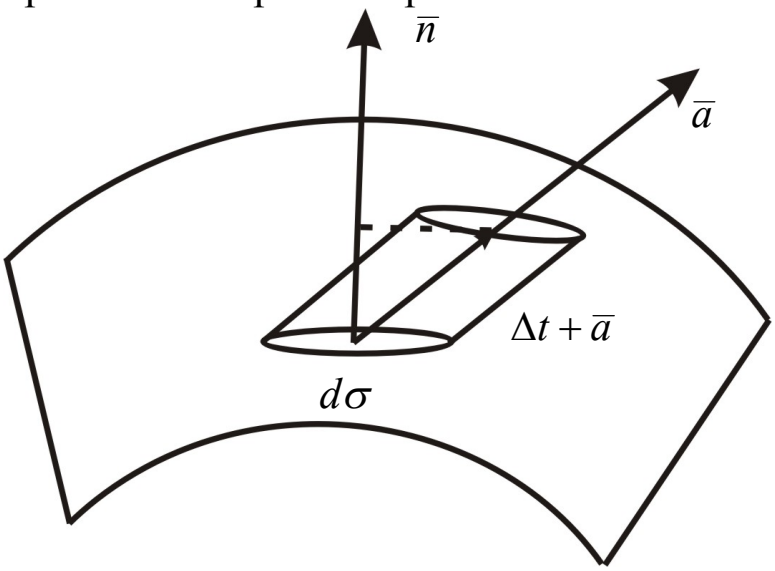



Рис. 11.1.

Справді, нехай за нескінченно малий проміжок часу $\Delta t$ частинки рідини, що знаходились на елементі поверхні $d\sigma$, перемістяться на вектор $\Delta t \cdot \bar{a}$ (рис. 11.1). В результаті через елемент поверхні $d\sigma$ витісниться певний об'єм рідини, що знаходиться в циліндрі з основою $d\sigma$ і твірною, що дорівнює $|\Delta t \cdot \bar{a}|$.

Знайдемо цей об'єм $dV$:

$$dV = h \cdot d\sigma, \quad h = \Delta t \bar{a} \cdot \bar{n}, \quad dV = \Delta t \bar{a} \cdot \bar{n} d\sigma.$$

Інтегруючи цей елементарний об'єм по всій поверхні $\sigma$, одержимо повний об'єм рідини, яка протекла через поверхню $\sigma$ за час $\Delta t$:

$$V = \Delta t \iint\limits_{\sigma} \bar{a} \cdot \bar{n} d\sigma.$$

При $\Delta t = 1$ одержимо, що потік векторного поля швидкостей стаціонарного руху рідини дорівнює об'єму рідини, що протікає за одиницю часу через поверхню $\sigma$.

Формулу (1) можна переписати в координатній формі та з урахуванням домовленостей щодо опускання символа суми так:

$$p = \iint\limits_{\sigma} a_i n_i d\sigma. \qquad (2)$$

На підінтегральну функцію можна дивитись як на результат згортання добутку двох тензорів $\bar{a}$ та $\bar{n}$ валентності 1.

Потік векторного поля має наступні властивості:

1) $\iint\limits_{\sigma'} \bar{a}(M)\bar{n}(M)d\sigma = -\iint\limits_{\sigma''} \bar{a}(M)\bar{n}(M)d\sigma$, *де* $\sigma'$ і $\sigma''$ – *дві сторони поверхні* $\sigma$;

2) $\iint\limits_{\sigma}\left(c_1\bar{a}_1(M)+c_2\bar{a}_2(M)\right)\bar{n}(M)d\sigma = c_1\iint\limits_{\sigma}\bar{a}_1(M)\bar{n}(M)d\sigma + c_2\iint\limits_{\sigma}\bar{a}_2(M)\bar{n}(M)d\sigma$;

3) *якщо* $\sigma$ *складається з частин* $\sigma_1$, $\sigma_2$,..., $\sigma_m$, *то*

$$\iint\limits_{\sigma}\bar{a}(M)\bar{n}(M)d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1}\bar{a}(M)\bar{n}(M)d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2}\bar{a}(M)\bar{n}(M)d\sigma + \ldots + \iint\limits_{\sigma_m}\bar{a}(M)\bar{n}(M)d\sigma .$$

Ці властивості випливають безпосередньо з означення потоку векторного поля та властивостей поверхневих інтегралів.

Таким чином, обчислення потоку векторного поля зводиться до обчислення поверхневих інтегралів. Зокрема, в декартових координатах маємо:

$$\bar{a}(M) = P(x,y,z)\bar{e}_1 + Q(x,y,z)\bar{e}_2 + R(x,y,z)\bar{e}_3,$$
$$\bar{n}(M) = \cos\alpha\bar{e}_1 + \cos\beta\bar{e}_2 + \cos\gamma\bar{e}_3,$$
$$p = \iint\limits_{\sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma . \qquad (3)$$

Для знаходження інтеграла (3) поверхню $\sigma$ проектують на одну з координатних площин. Нехай, наприклад, $\sigma$ взаємно однозначно проектується на площину *xOy*. Тоді

$$d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}.$$

Позначимо $\sigma_{xy}$ проекцію $\sigma$ на площину *xOy*, одержимо подвійний інтеграл

$$p = \iint\limits_{\sigma_{xy}}\frac{\bar{a}\cdot\bar{n}}{|\cos\gamma|}dxdy,\ z = z(x,y), \qquad (4)$$

де $z = z(x, y)$ знаходиться з рівняння поверхні $\sigma$.

Аналогічно, коли $\sigma$ проектується на *yOz* або на *xOz*:

$$p = \iint\limits_{\sigma_{yz}}\frac{\bar{a}\cdot\bar{n}}{|\cos\alpha|}dydz,\ x = x\,(y,z), \qquad (5)$$

$$p = \iint\limits_{\sigma_{xz}}\frac{\bar{a}\cdot\bar{n}}{|\cos\beta|}dxdz,\ y = y(x,z). \qquad (6)$$

Інколи проектування проводиться на всі три координатні площини. Тоді

$$p = \iint\limits_{\sigma}(Pdydz + Qdxdz + Rdxdy . \qquad (7)$$

Тут кожний доданок обчислюють окремо. Наприклад,

$$\iint\limits_{\sigma}Pdydz = \pm\iint\limits_{\sigma_{yz}}P(x(y,z),y,z)dydz,$$

де $x = x\ (y,\ z)$ обчислюється з рівняння поверхні, а знак перед інтегралом – це знак напрямного косинуса $(\cos\alpha)$ нормалі до поверхні $\sigma$.

Для знаходження $\overline{n}(M)$ використовуються відповідні методи за формулою:

$$\overline{n}(M) = \frac{grad\ F(M)}{|grad\ F(M)|}, \qquad (8)$$

де $F(x, y, z) = 0$ – рівняння поверхні $\sigma$.

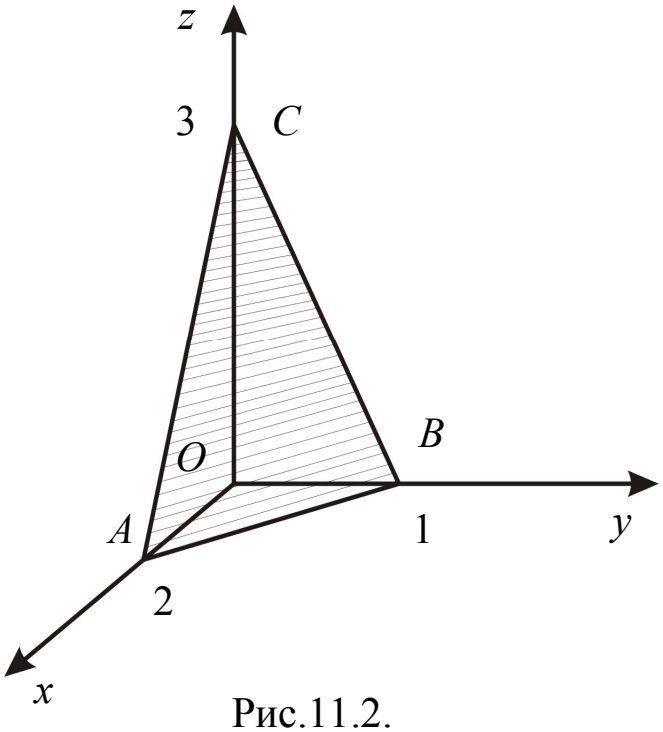



Рис.11.2.

**Приклад 1.** Знайти потік векторного поля $\overline{a} = z\overline{e}_1 - x\overline{e}_2 + y\overline{e}_3$ через плоский трикутник $\sigma$, який утворюється при перетині площини $3x+6y+2z-6=0$ з координатними площинами (взяти верхню сторону трикутника).

**Розв'язання.** Побудуємо поверхню $ABC$ (див. рис. 11.2) і будемо проектувати трикутник на всі три координатні площини. За умовою $P(x, y, z) = z$, $Q(x, y, z) = -x$, $R(x, y, z) = y$.

За формулою (7)

$$p = \iint_{\sigma} (zdydz - xdxdz + ydxdy).$$

Знайдемо одиничний вектор нормалі за формулою (8):

$$\overline{n} = \pm\frac{3\overline{e}_1 + 6\overline{e}_2 + 2\overline{e}_3}{\sqrt{9+34+6}} = \pm\frac{1}{7}(3\overline{e}_1 + 6\overline{e}_2 + 2\overline{e}_3)$$

На верхній стороні трикутника $\cos\gamma > 0$ (кут між $\overline{n}$ і віссю $Oz$ гострий). Тому треба взяти знак „+". Отже, $\cos\alpha = \frac{3}{7}$, $\cos\beta = \frac{6}{7}$, $\cos\gamma = \frac{2}{7}$. Перейдемо до обчислення подвійних інтегралів, проектуючи трикутник на координатні площини. Перед інтегралами

буде знак відповідного косинуса (в цьому прикладі скрізь „+”). Одержимо

$$\iint\limits_{\sigma} zdydz = \iint\limits_{BOC} zdydz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{3-3y} zdz = \int\limits_0^1 \frac{(3-3y)^2}{2} dy = \frac{9}{2}\int\limits_0^1 (1+y^2-2y)dy =$$

$$= \frac{9}{2}\left( y + \frac{y^3}{3} - y^2 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{2}.$$

$$\iint\limits_{\sigma} (-xdxdz) = -\iint\limits_{AOC} xdxdz = -\int\limits_0^2 xdx \int\limits_0^{3-\frac{3}{2}x} dz = -\int\limits_0^2 \left( 3x - \frac{3}{2}x^2 \right) dx =$$

$$= -\left( \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{2} \right)\Bigg|_0^2 = -2.$$

$$\iint\limits_{\sigma} ydxdy = \iint\limits_{AOB} ydxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{1-\frac{x}{2}} ydy = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(1-\frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\left( x + \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

В результаті одержимо: $p = \frac{3}{2} - 2 + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$.

**Приклад 2.** Знайти потік векторного поля $\bar{a} = x\bar{e}_1 + (z+y)\bar{e}_2 + (z-y)\bar{e}_3$ через зовнішню сторону частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, розташованої в першому октанті ($x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$).

**Розв’язання.** Задачу розглянемо з використанням сферичної системи координат та її зв’язків з декартовою системою координат (див. §8). Маємо:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta.$$

Елемент площі сфери: $d\sigma = r^2\sin\theta\cos\varphi$.

Одиничний вектор зовнішньої нормалі: $\bar{n} = \frac{1}{r}(x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3)$.

Скалярний добуток: $\bar{a}\cdot\bar{n} = \frac{1}{r}(x^2 + yz + y^2 + z^2 - yz) = \frac{1}{r}\cdot r^2 = r$.

В першому октанті $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Тому

$$p = \iint\limits_{\sigma} \overline{a}\overline{n}\, d\sigma = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} r \cdot r^2 \sin\theta d\theta = r^3 \cdot \frac{\pi}{2}(-\cos\theta)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^3}{2}.$$

**11.2. Теорема Остроградського** (М.В.Остроградський (1801 – 1862)– видатний український математик, механік і педагог).

*Якщо функції P(x, y, z),Q(x, y, z), R(x, y, z) неперервні та мають неперервні частинні похідні в деякій замкненій області V, а $\sigma$ – кусково-гладка поверхня, що обмежує область V. то має місце формула (Остроградського):*

$$\oiint\limits_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz, \quad (9)$$

*де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси одиничного вектора $\overline{n}$ зовнішньої нормалі до поверхні $\sigma$.*

У векторній формі формула Остроградського має вигляд:

$$P = \oiint\limits_{\sigma} \overline{a}\overline{n}\, d\sigma = \iiint\limits_{V} div\overline{a}\, dV. \quad (10)$$

Отже, *потік векторного поля через замкнену поверхню дорівнює інтегралу від дивергенції цього поля по об'єму V, що обмежений поверхнею $\sigma$.*

Обчислення потоку векторного поля через замкнену поверхню в багатьох випадках спрощується, якщо для цього використовувати формулу Остроградського. Зокрема, безпосередньо з формули випливає, що потік соленоїдного поля (у цьому випадку $\operatorname{div}\overline{a} = 0$) через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю.

Використовуючи формулу Остроградського, можна довести, що дивергенція векторного поля є його інваріантом і не залежить від вибору системи координат.

**Приклад 3.** Знайти потік центрально-симетричного поля $\overline{a} = f(r)\overline{r}$ через поверхню *S* сфери радіуса *R*, якщо центр поля і центр сфери збігаються та $f(0) \neq \infty$.

**Розв'язання.** Оскільки (див. §10, приклад 6)

$$\operatorname{div}\overline{a} = 3f(r) + rf'(r) = \frac{1}{r^2}(r^3 \cdot f(r))',$$

то за формулою (10) з використанням сферичних координат одержимо

$$p = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{R} \frac{1}{r^2}(r^3 f(r))' r^2 dr = \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot -(\cos\theta)\Big|_0^{\pi} \cdot r^3 f(r)\Big|_0^{R} = 4\pi R^3 f(R)$$

**11.3. Лінійні інтеграли та циркуляція векторного поля.** Нехай в області $V$ простору задане векторне поле $\bar{a}(M)$. У цьому векторному полі візьмемо деяку криву $AB$ (рис. 11.3) і розіб'ємо її точками $M_1 = A$, $M_2$, ..., $M_{n+1} = B$ на $n$ частин. Виберемо точку $O$ (початок координат) і розглянемо радіус-вектор $\overline{OM}_i = \bar{r}_i$ $(i = \overline{1, n+1})$. Позначимо $\Delta\bar{r}_i = \bar{r}_{i+1} - \bar{r}_i$.

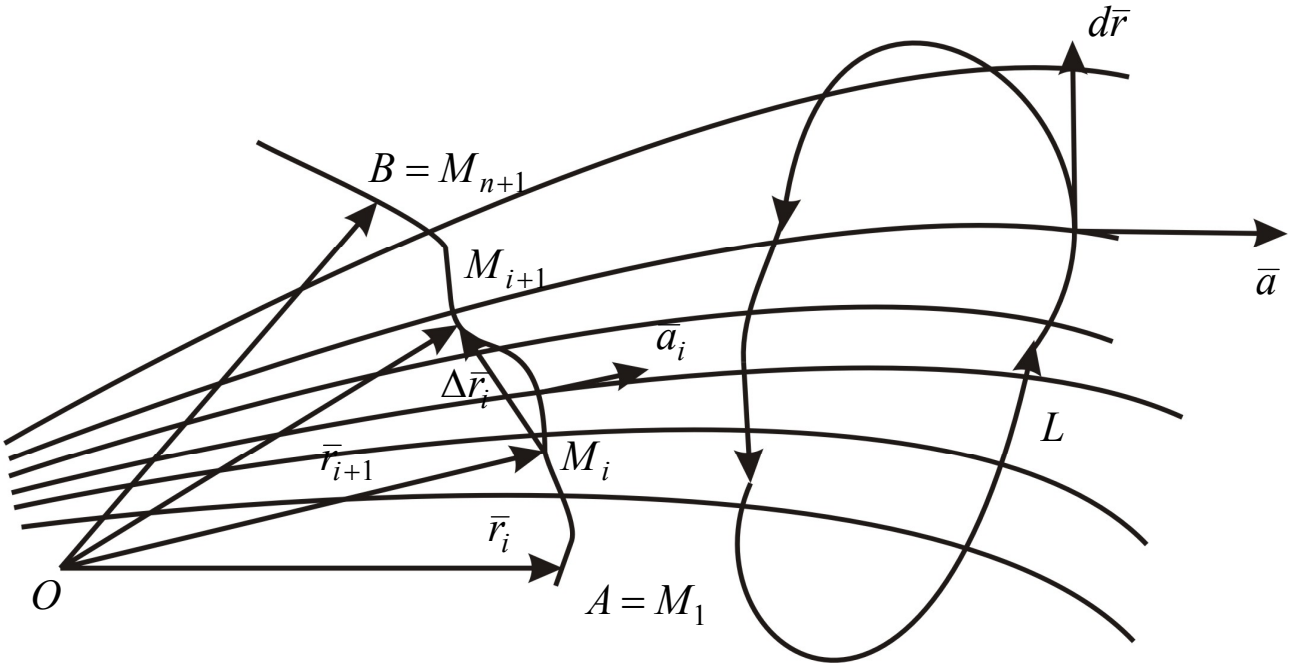



Рис.11.3.

Утворимо суму $\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i \cdot \Delta\bar{r}_i$, де $\bar{a}_i$ – вектор поля в деякій точці частини кривої $M_iM_{i+1}$. Границя цієї суми, якщо вона існує, при $n \to \infty$ і $\left|\Delta\bar{r}_i\right| \to 0$ для будь-якого $i$ називається *лінійним інтегралом* вздовж кривої $AB = L$. Запис:

$$W = \lim_{\substack{n\to\infty \\ |\Delta\bar{r}_i|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i \cdot \Delta\bar{r}_i = \int_{AB} \bar{a}\, d\bar{r} = \int_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz. \qquad (11)$$

Тут вектор $d\bar{r}$ є дотичним до кривої $AB$ в кожній її точці, а його модуль дорівнює диференціалу дуги:

$$\left|d\bar{r}\right| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dL. \qquad (12)$$

Якщо $\bar{a}(M) = \bar{f}(M)$ – силове поле, то $W = \int_L \bar{f} d\bar{r}$ – робота цього поля вздовж кривої $L$.

Особливий інтерес представляють лінійні інтеграли по замкненому контуру $L$ (див. рис. 11.3). Лінійний інтеграл по замкненому контуру $L$ називається *циркуляцією векторного поля* і позначається так:

$$\Gamma = \oint_L \bar{a} d\bar{r} . \qquad (13)$$

Основні властивості лінійного інтеграла:

1) $\int_L (c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2) d\bar{r} = c_1 \int_L \bar{a}_1 d\bar{r} + c_2 \int_L \bar{a}_2 d\bar{r}$;

2) $\int_{L_1+L_2} \bar{a} d\bar{r} = \int_{L_1} \bar{a} d\bar{r} + \int_{L_2} \bar{a} d\bar{r}$;

3) $\int_{AB} \bar{a} d\bar{r} = -\int_{BA} \bar{a} d\bar{r}$.

Доведення цих властивостей випливає безпосередньо з означення лінійного інтеграла.

В декартовій системі координат

$$\bar{a}(M) = P(M)\bar{e}_1 + Q(M)\bar{e}_2 + R(M)\bar{e}_3 ,$$
$$d\bar{r} = dx \cdot \bar{e}_1 + dy \cdot \bar{e}_2 + dz \cdot \bar{e}_3 .$$

Тому

$$W = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz . \qquad (14)$$

Інтеграл (14) обчислюють підстановкою виразів $x$, $y$, $z$ з рівняння лінії $L$. При цьому одержуємо визначений інтеграл по параметру, нижня межа інтегрування якого дорівнює значенню параметра в початковій точці, а верхня – в кінцевій точці дуги (шляху) $L$.

**Приклад 4.** Знайти роботу силового поля $F(M) = x\bar{e}_1 + x\bar{e}_2 - \bar{e}_3$ вздовж одного витка винтової лінії $L$: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

**Розв'язання.** За формулою (14) маємо:

$$W = \int_L \bar{F} d\bar{r} = \int_L x dx + x dy - dz = \int_0^{2\pi} (a\cos t \cdot (-a\sin t) + a\cos t \cdot a\cos t - b) dt =$$

$$= -a^2 \frac{\sin^2 t}{2}\bigg|_0^{2\pi} + a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin^2 t}{4}\right)\bigg|_0^{2\pi} - bt\big|_0^{2\pi} = \pi(a^2 - 2b) .$$

**Приклад 5.** Знайти циркуляцію векторного поля

$$\bar{a} = (x - 2z)\bar{e}_1 + (x + 3y + z)\bar{e}_2 + (5x + y)\bar{e}_3$$

по контуру трикутника $ABC$ з вершинами $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.

**Розв'язання.** Побудуємо названий в умові трикутник $ABC$ (рис. 11.4). Контур $L$ є сумою трьох частин: $\overset{\smile}{AB} + \overset{\smile}{BC} + \overset{\smile}{CA}$.

Тому за властивостями циркуляції

$$\Gamma = \oint_L \bar{a}\,d\bar{r} = \int_{AB} \bar{a}\,d\bar{r} + \int_{BC} \bar{a}\,d\bar{r} + \int_{CA} \bar{a}\,d\bar{r}.$$

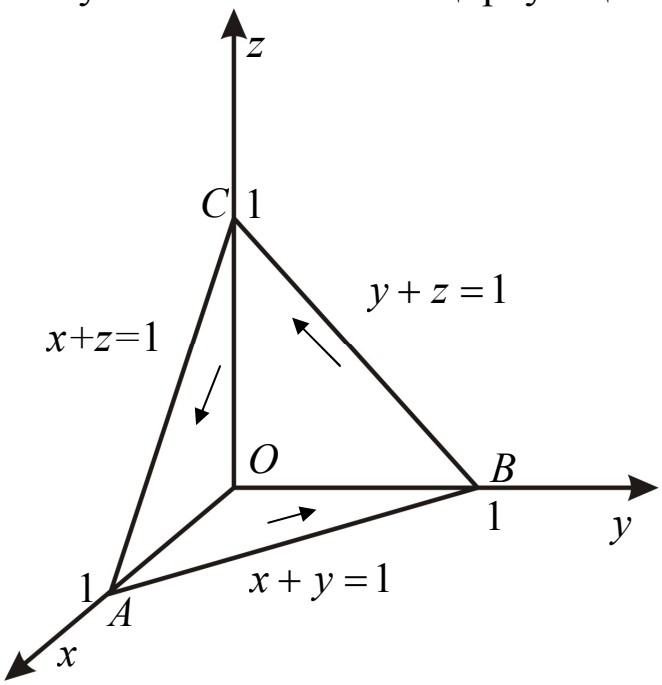



Рис.11.4.

Кожний з доданків правої частини обчислимо окремо. На відрізку $AB$ $z = 0$, $dz = 0$. Тому

$$\bar{a} \cdot d\bar{r} = xdx + (x + 3y)dy.$$

З рівняння $x + y = 1$ прямої $AB$ маємо $y = 1 - x$, $dy = -dx$ і тому

$$\bar{a} \cdot d\bar{r} = xdx + (x + 3 - 3x)(-dx) = (3x - 3)dx$$

$$\int_{AB} \bar{a}\,d\bar{r} = \int_0^1 (3x - 3)dx = \frac{3}{2}x^2 - 3x\Big|_0^1 = -\frac{3}{2}$$

На відрізку $BC$ маємо $x = 0$, $dx = 0$, $z = 1 - y$, $dz = -dy$.

$$\bar{a} \cdot d\bar{r} = (3y + z)dy + ydz = (y + 1)dy,$$

$$\int_{BC} \bar{a}\,d\bar{r} = \int_0^1 (y + 1)dy = \left(\frac{y^2}{2} + y\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

На відрізку $CA$ маємо $y = 0$, $dy = 0$, $z = 1 - x$, $dz = -dx$.

$$\bar{a} \cdot d\bar{r} = (x - 2z)dx + 5xdz = (-2x - 2)dx,$$

$$\int_{CA} \bar{a}\,d\bar{r} = \int_0^1 (-2x - 2)dx = (-x^2 - 2x)\Big|_0^1 = -3.$$

Отже, циркуляція $\Gamma = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 3 = -3$.

**11.4. Теорема Стокса.** Англійський математик і фізик Д.Г. Стокс (1819–1903) вивів формулу, яка перетворює лінійний інтеграл вздовж замкненої просторової кривої в поверхневий інтеграл по поверхні, яка натягнута на цю криву.

**Теорема Стокса.** *Нехай в деякій області V простору задано неперервно-диференційовне векторне поле* $\bar{a}(M)$ *і незамкнену кусково-гладку поверхню* $\sigma$*, обмежену кусково-гладким контуром L. Сторона поверхні вибрана так, щоб напрямок обходу по контуру з кінця одиничного вектора* $\bar{n}$ *нормалі до* $\sigma$ *було видно таким, що здійснюється проти годинникової стрілки. Тоді має місце формула (Стокса):*

$$\iint\limits_{\sigma} rot\,\bar{a}\cdot\bar{n}\,d\sigma = \oint\limits_{L}\bar{a}\,d\bar{r}\,, \tag{15}$$

або в декартових координатах

$$\iint\limits_{\sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma =$$

$$=\oint\limits_{L}P dx+Q dy+R dz\,. \tag{16}$$

Таким чином, потік ротора векторного поля $\bar{a}(M)$ через поверхню $\sigma$ дорівнює циркуляції поля $\bar{a}(M)$ по границі $L$ цієї поверхні.

Теорема Стокса дає можливість довести інваріантність ротора векторного поля, тобто його незалежність від вибору системи координат.

**Приклад 6.** За допомогою теореми Стокса знайти циркуляцію векторного поля по заданому контуру за умовою прикладу 5.

**Розв'язання.** За умовою $\bar{a}=(x-2z)\bar{e}_1+(x+3y+z)\bar{e}_2+(5x+y)\bar{e}_3$. В ролі поверхні $\sigma$ візьмемо частину площини, обмежену трикутником *ABC* (див. рис. 11.4). Знайдемо одиничний вектор нормалі до площини. Рівняння поверхні *F*(*x*, *y*, *z*) (тобто площини) буде $x+y+z=1$. Тоді

$$\bar{n}=\frac{grad\,F}{|grad\,F|}=\frac{\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3}{\sqrt{3}}.$$

Отже, $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}>0$. Тому $\bar{n}$ утворює з вісями координат гострі кути і забезпечує потрібну орієнтацію поверхні. Обчислимо ротор заданого поля:

$$rot\,\bar{a}(M)=\begin{vmatrix}\bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x-2z & x+3y+z & 5x+y\end{vmatrix}=\bar{e}_1\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x+3y+z & 5x+y\end{vmatrix}-$$

$$-\bar{e}_2\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x-2z & 5x+y\end{vmatrix}+\bar{e}_3\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ x-2z & x+3y+z\end{vmatrix}=-7\bar{e}_2+\bar{e}_3.$$

Обчислюємо скалярний добуток ротора і орта нормалі:

$$rot\,\bar{a}(M)\cdot\bar{n}=-\frac{7}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{6}{\sqrt{3}}.$$

Обчислюємо циркуляцію за формулою Стокса:

$$\Gamma=\iint\limits_{\sigma} rot\,\bar{a}(M)\cdot\bar{n}d\sigma=-\frac{6}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\sigma}d\sigma.$$

Проектуємо $\Delta ABC$ на площину $xOy$ і одержимо $\Delta ABO$, обмежений прямою $x + y = 1$ та вісями $Ox$ і $Oy$. При цьому

$$d\sigma=\frac{dxdy}{|\cos\gamma|}=\sqrt{3}dxdy.$$

Остаточно маємо:

$$\Gamma=-\frac{6}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\sigma}d\sigma=-\frac{6}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy=-6\int\limits_0^1(1-x)dx=-6\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=-3.$$

Одержали той же результат, що і в прикладі 5.

## Задачі

**11.1.** Знайти потік векторного поля $\bar{a}=2x\bar{e}_1+(1-2y)\bar{e}_2+2z\bar{e}_3$ через замкнену поверхню $\sigma$, яка складається з частини параболоїда $x^2+z^2=1-2y$, де $y\ge 0$ і площини $xOz$.

**11.2.** Знайти потік векторного поля $\bar{a}=yz\bar{e}_1+xz\bar{e}_2+xy\bar{e}_3$ через повну поверхню піраміди з вершинами $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(0, 0, 2)$.

**11.3.** Знайти потік векторного поля $\bar{a}=y\bar{e}_1-2x\bar{e}_2-z\bar{e}_3$ через зовнішню сторону півсфери $x^2+y^2+z^2=4$ (при $z\ge 0$).

**11.4.** Знайти потік векторного поля $\bar{a}=z^2\bar{e}_1+xz\bar{e}_2+y\bar{e}_3$ через зовнішню сторону частини параболоїда $S$:

$$x^2+y^2=4-z,\ z\ge 0.$$

Вказівка: поверхня незамкнена, тому теорему Остроградського застосувати не можна. Тому треба поверхню $S$ доповнити поверхнею основи $S_1$. Тоді $\sigma = S + S_1$ і $p_S = p_\sigma - p_{S_1}$.

**11.5.** Обчислити двома способами (безпосередньо і за теоремою Остроградського) потік векторного поля $\bar{a}$ через замкнену поверхню $\sigma$:

1) $\bar{a} = z\bar{e}_1 - y\bar{e}_2 + 2z\bar{e}_3$, $\sigma : \{3x + 2y + z = 6, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$;

2) $\bar{a} = 2xy\bar{e}_1 - y^2\bar{e}_2 + 2z\bar{e}_3$, $\sigma : \{x^2 + y^2 + z^2 = 9, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

**11.6.** Обчислити лінійний інтеграл плоского поля $\bar{a} = (x + y)\bar{e}_1 + (x - y)\bar{e}_2$ вздовж дуги $L = OA$ параболи $x^2 = y$, якщо $O(0, 0)$, $A(1, 1)$.

**11.7.** Обчислити циркуляцію векторного поля $\bar{a} = x\bar{e}_1 - z\bar{e}_2 + y\bar{e}_3$ вздовж контура $C$, утвореного при перетині поверхні $y^2 = 4 - x - z$ з координатними площинами.

**11.8.** Знайти циркуляцію векторного поля $\bar{a} = xy\bar{e}_1 + yz\bar{e}_2 + xz\bar{e}_3$ вздовж замкненого контура, утвореного при перетині циліндра $x^2 + y^2 = 1$ і площини $x + y + z = 1$.

**11.9.** Користуючись теоремою Стокса, дати відповідь на питання задачі 11.7, враховуючи додаткову умову $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

**11.10.** Обчислити циркуляцію векторного поля двома способами (безпосередньо і за теоремою Стокса):

1) $\bar{a} = xyz\bar{e}_1 + (x + y + z)\bar{e}_2 - x^2y^2\bar{e}_3$, $C$: $\{x + y = 5, x - y = 5, x + y = -5, x - y = -5\}$;

2) $\bar{a} = y\bar{e}_1 + (x - 1)^2\bar{e}_2 + z\bar{e}_3$, $C$: $\{x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 + z^2 = 4x\}$.

# Список рекомендованої та використаної літератури


1. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. – М.: Наука, 1972. – 352с.
2. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. – Х.: Высшая школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1986. – 216с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974. – 296с.
4. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Наука, 1965. – 426с.
5. Кручкович Г.И., Мордасова Г.М., Сулейманова Х.Р. и др. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. – М.: Высшая школа, 1970. – 512с.
6. Мантуров О.В. Элементы тензорного исчисления. – М.: Просвещение, 1991. – 255с.
7. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1967. – 664с.
8. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. – М.: Наука, 1964. – 304с.

Навчальне видання

**Лиман Федір Миколайович**

**Основи векторного та тензорного аналізу**
Навчальний посібник
для студентів фізико-математичних факультетів

Суми: СумДПУ, 2005
Свідоцтво ДК №231 від 2.11.2002р.

Відповідальний за випуск **В.В.Бугаєнко**
Комп'ютерний набір та верстка **М.Г. Друшляк, О.М. Удовиченко**

Здано в набір 13.09.04. Підписано до друку _____Формат 60×84/16. Гарн. Times New Roman. Папір друк. Друк ризогр. Умовн. друк. арк. Обл.- вид. арк. Тираж 100. Вид. №

СумДПу імені А.С. Макаренка
40002 Суми, вул. Роменська, 87
Виготовлено на обладнанні СумДПУ імені А.С. Макаренка
Зам. №